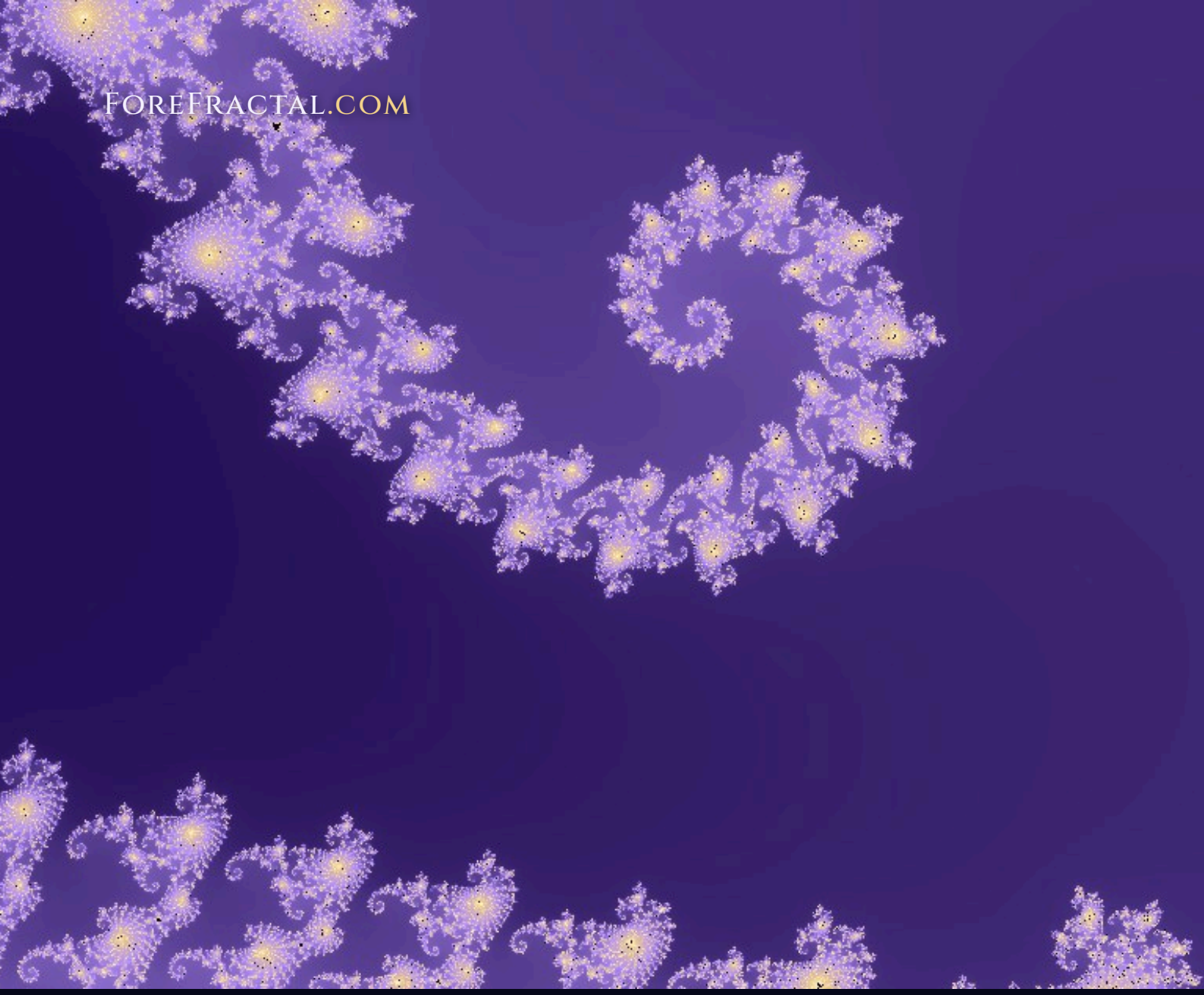


Una guía gratuita sobre *fractales*

Autosimilitud, dimensión y el conjunto de Mandelbrot, paso a paso

por Fractalist · ForeFractal.com

Cómo usar esta guía

Esta guía presenta los fractales, las formas que muestran detalle a todas las escalas, desde las costas y los helechos hasta el conjunto de Mandelbrot. Abarca los mismos contenidos que el curso en línea gratuito: léela de principio a fin o ve directamente al capítulo que necesites.

No necesitas saber nada más allá del álgebra escolar. Donde aparecen logaritmos o números complejos, la guía explica en el momento lo que necesitas. Los ejemplos resueltos muestran cada paso del cálculo; intenta resolver cada uno por tu cuenta antes de leer la solución.

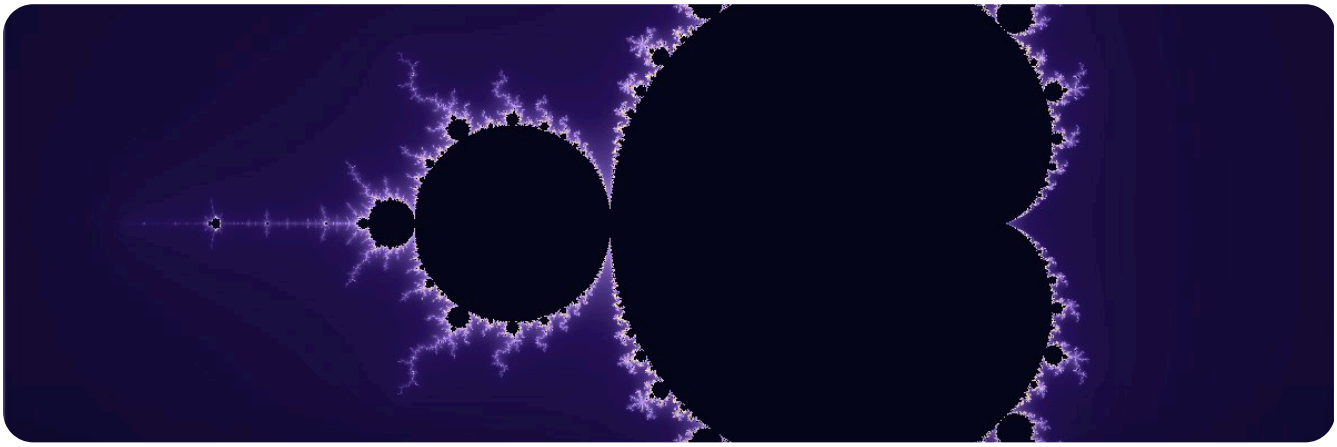
Al final encontrarás una pregunta de prueba por cada lección del curso, con las respuestas en una página aparte. Los docentes pueden imprimir la guía y usarla como material para repartir, para los deberes o para el repaso.

Índice

1. Qué es realmente un fractal
2. Ejemplo 1 · El conjunto de Cantor, paso a paso
3. Ejemplo 2 · El copo de nieve de Koch en números
4. Ejemplo 3 · La dimensión, medida de tres formas
5. Ejemplo 4 · Iterar $z^2 + c$ a mano
6. Ejemplo 5 · Construir un helecho con cuatro reglas
7. Ejemplo 6 · Hacer crecer una curva a partir de una cadena
8. Ejemplo 7 · Una montaña aleatoria a mano
9. Ejemplo 8 · Medir un objeto real
10. Seis ideas erróneas frecuentes
11. Tabla resumen
12. Ponte a prueba
13. Respuestas
14. Sigue en línea

Los fractales explicados a fondo, con ejemplos resueltos

Esta página es la versión larga. En lugar de usar solo imágenes, cada idea se desarrolla con números reales que puedes comprobar en papel o con una calculadora. Léela de principio a fin o salta directamente al ejemplo que necesites.



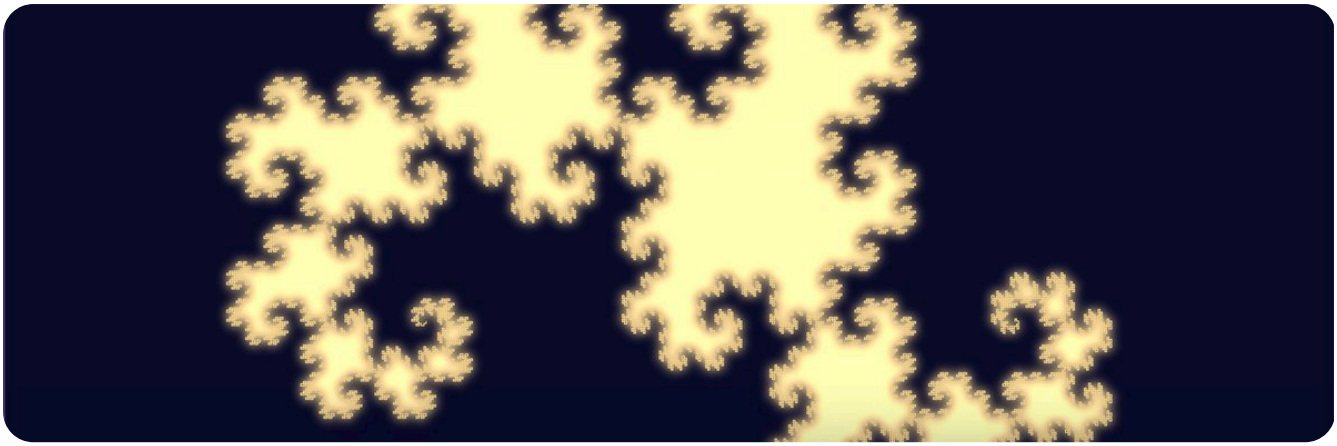
Qué es realmente un fractal

La geometría ordinaria describe formas que se vuelven más simples cuando las miras de cerca. Amplía cualquier trocito de una circunferencia y parecerá una línea recta; amplía una esfera y parecerá un plano. El cálculo se basa en este hecho: si te acercas lo suficiente, todo lo que es suave se vuelve lineal.

Un fractal es una forma en la que esto nunca ocurre. Por mucho que la amplíes, sigue apareciendo detalle nuevo, y ese detalle es del mismo tipo general que el anterior. Normalmente se combinan tres ingredientes:

1. **Detalle a todas las escalas.** No existe ningún nivel de ampliación en el que la forma se vuelva suave.
2. **Algún tipo de autosimilitud.** Las partes pequeñas se parecen al todo, ya sea de forma exacta (la curva de Koch), aproximada (el conjunto de Mandelbrot) o solo estadística (una costa).
3. **Una dimensión fraccionaria.** Un número sencillo, normalmente situado entre los números enteros habituales, mide hasta qué punto la forma llena el espacio.

Hay además un cuarto ingrediente, práctico, que explica por qué importan los fractales: suelen generarse mediante una *regla muy corta aplicada una y otra vez*. Esa es la idea de *iteración*, y los ocho ejemplos que siguen se basan en ella.



Ejemplo 1 · El conjunto de Cantor, paso a paso

Empieza con el intervalo de 0 a 1. Quita el tercio central abierto, de modo que queden [0, 1/3] y [2/3, 1]. A cada trozo restante quítale de nuevo su tercio central, y repite indefinidamente.

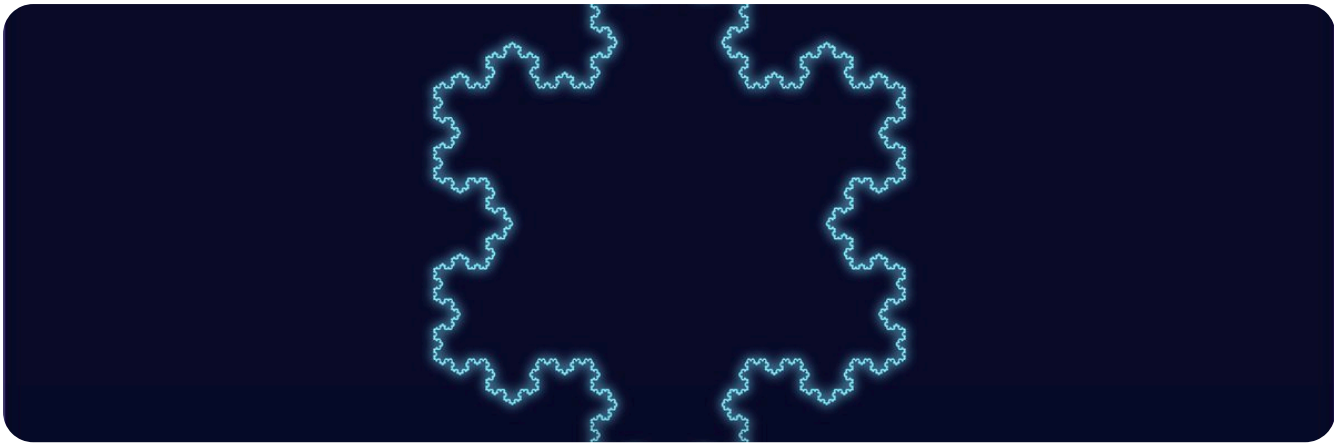
Paso n	Trozos 2^n	Longitud de cada uno 3^{-n}	Longitud total $(2/3)^n$
0	1	1	1
1	2	0.3333	0.6667
2	4	0.1111	0.4444
3	8	0.0370	0.2963
4	16	0.0123	0.1975
5	32	0.0041	0.1317

La longitud total se multiplica por 2/3 en cada paso y tiende a cero. Sin embargo, sobrevive algo infinito. Escribe los números en base 3: quitar el tercio central elimina los números cuya primera cifra ternaria tiene que ser 1. Lo que queda son exactamente los números que pueden escribirse solo con las cifras 0 y 2.

COMPROBACIÓN RESUELTA

¿Está 1/4 en el conjunto de Cantor? En base 3, $1/4 = 0.020202\ldots_3$ (porque $0.0202\ldots_3 = 2/9 + 2/81 + \ldots = (2/9)/(1 - 1/9) = 1/4$). Solo usa ceros y doses, así que sí. Pertenece al conjunto aunque nunca es el extremo de ninguno de los intervalos eliminados.

Como cada sucesión infinita de ceros y doses da un punto distinto, el conjunto de Cantor tiene tantos puntos como el intervalo entero. Un conjunto puede tener longitud cero y aun así ser no numerable. Su dimensión, que calcularemos en el ejemplo 3, es aproximadamente 0.6309: más que un puñado de puntos sueltos, menos que una línea.



Ejemplo 2 · El copo de nieve de Koch en números

Empieza con un triángulo equilátero de lado 1. Sobre el tercio central de cada lado construye un triángulo equilátero que apunte hacia fuera y borra su base. Cada lado se convierte en cuatro lados, cada uno de un tercio de la longitud. Repite.

Paso n	**Lados $3 \cdot 4^n$**	**Perímetro $3 \cdot (4/3)^n$**	**Área (original = 1)**
0	3	3.000	1.0000
1	12	4.000	1.3333
2	48	5.333	1.4815
3	192	7.111	1.5473
4	768	9.481	1.5766
∞	∞	∞	1.6000

Por qué converge el área. En el paso 1 añadimos 3 triángulos, cada uno con 1/9 del área original: +3/9. En el paso 2 añadimos 12 triángulos con 1/81 del área: +12/81 = +(3/9)·(4/9). Cada paso añade 4/9 de lo que añadió el paso anterior. El total añadido es una serie geométrica:

$$3/9 \cdot (1 + 4/9 + (4/9)^2 + \ldots) = (1/3) \cdot 1/(1 - 4/9) = 3/5$$

Así, el copo terminado tiene un área de 1 + 3/5 = 8/5 de la del triángulo inicial, mientras que su perímetro, multiplicado por 4/3 en cada paso, crece sin límite. Un área finita queda encerrada por un borde infinitamente largo. Puedes verlo ocurrir con el control deslizante de la página Autosimilitud.



Ejemplo 3 · La dimensión, medida de tres formas

Forma 1: contar copias autosimilares

Corta un segmento por la mitad: 2 copias a escala 1/2. Divide un cuadrado en una cuadrícula de 2×2: 4 copias. Un cubo: 8 copias. En todos los casos $N = (1/s)^D$, donde N es el número de copias, s el factor de escala y D la dimensión. Despeja D:

```
D = log N / log(1/s)
```

Forma	N	1/s	D = log N / log(1/s)
Conjunto de Cantor	2	3	log 2 / log 3 = 0.6309
Curva de Koch	4	3	log 4 / log 3 = 1.2619
Triángulo de Sierpiński	3	2	log 3 / log 2 = 1.5850
Alfombra de Sierpiński	8	3	log 8 / log 3 = 1.8928
Esponja de Menger	20	3	log 20 / log 3 = 2.7268

Forma 2: conteo de cajas

Cubre la forma con una cuadrícula de cajas de lado ε y cuenta cuántas cajas $N(\varepsilon)$ la tocan. Para el triángulo de Sierpiński dibujado en un cuadrado unidad:

Tamaño de caja ε	Cajas N(ε)	log N / log(1/ε)
1/2	3	1.585
1/4	9	1.585
1/8	27	1.585
1/16	81	1.585

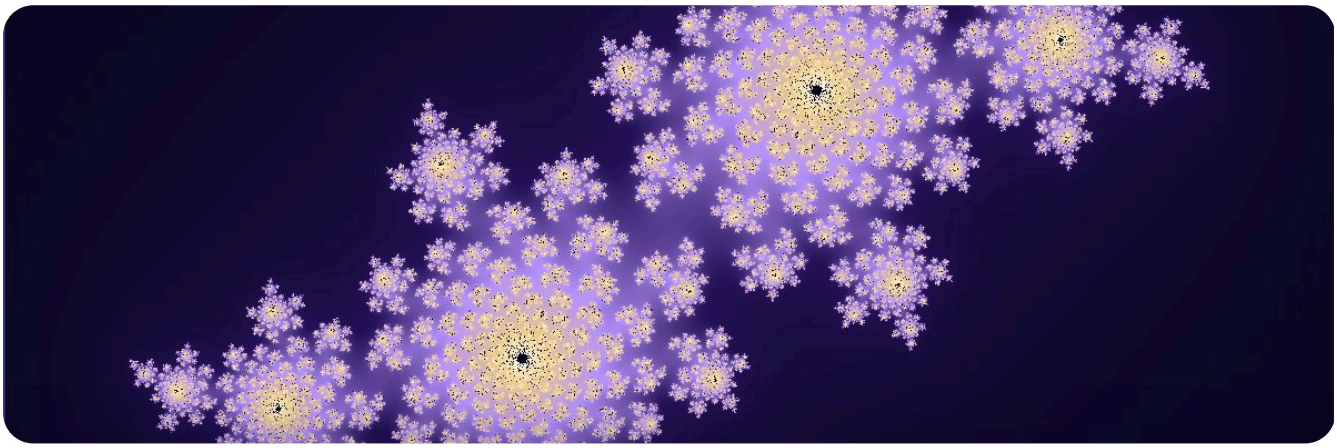
Cada vez que el tamaño de caja se reduce a la mitad, el recuento se triplica, así que la pendiente de log N frente a log(1/ε) es log 3 / log 2, la misma respuesta que con la forma 1. En un objeto real los recuentos no son tan limpios: representas los puntos y ajustas una recta en el rango intermedio de escalas.

Forma 3: el método de la regla (Richardson)

Recorre una costa con un compás de puntas. Con una abertura mayor te saltas las pequeñas bahías; con una menor las sigues, de modo que la longitud medida L crece a medida que la regla ε se acorta: $L(\varepsilon) \approx F \cdot \varepsilon^{1-D}$.

EJEMPLO RESUELTO (CIFRAS ILUSTRATIVAS)

Supón que una regla de 100 km da una longitud de 2800 km y una regla de 10 km da 5000 km. La regla se redujo en un factor de 10 y la longitud creció en 5000/2800 = 1.786. Entonces $1 - D = -\log(1.786)/\log(10) = -0.252$, de modo que $D \approx 1.25$, el valor que Mandelbrot citó para la costa occidental de Gran Bretaña.



Ejemplo 4 · Iterar $z^2 + c$ a mano

El conjunto de Mandelbrot es el conjunto de los números c para los que la sucesión 0, c, $c^2 + c$, … permanece acotada. Puedes poner a prueba puntos sin más herramienta que la aritmética.

c	Órbita de 0	Veredicto
−1	0, −1, 0, −1, 0, …	Ciclo de periodo 2: **dentro**
1	0, 1, 2, 5, 26, 677, …	Se dispara: **fuera**
−2	0, −2, 2, 2, 2, …	Se queda fijo en 2: **dentro** (la punta izquierda)
i	0, i, −1 + i, −i, −1 + i, −i, …	Cae en un 2-ciclo: **dentro**, en la frontera
0.25	0, 0.25, 0.3125, 0.3477, … → 0.5	Se acerca lentamente a 0.5: **dentro** (la cúspide)
0.3	0, 0.3, 0.39, 0.4521, 0.5044, … 1.0373, 1.3760, 2.1933	Supera 2 en el paso 12: **fuera**

CÓMO ELEVAR AL CUADRADO UN NÚMERO COMPLEJO

$(-1 + i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$. Al sumar c = i se obtiene −i. Luego $(-i)^2 = -1$, y al sumar i vuelve a dar −1 + i. La órbita queda atrapada en un bucle, así que i pertenece al conjunto.

La última fila muestra por qué las imágenes necesitan muchas iteraciones cerca de la frontera: c = 0.3 está fuera, pero solo por poco, así que hacen falta doce pasos para revelarlo. Los puntos más cercanos a la frontera necesitan cientos o millones. En cuanto |z| supera 2, la órbita escapa con toda seguridad; esa es la regla de parada que usan todos los programas de Mandelbrot. Prueba estos valores en la página de conjuntos de Julia: c = −1 da la «basílica», y c = i, una dendrita.



Ejemplo 5 · Construir un helecho con cuatro reglas

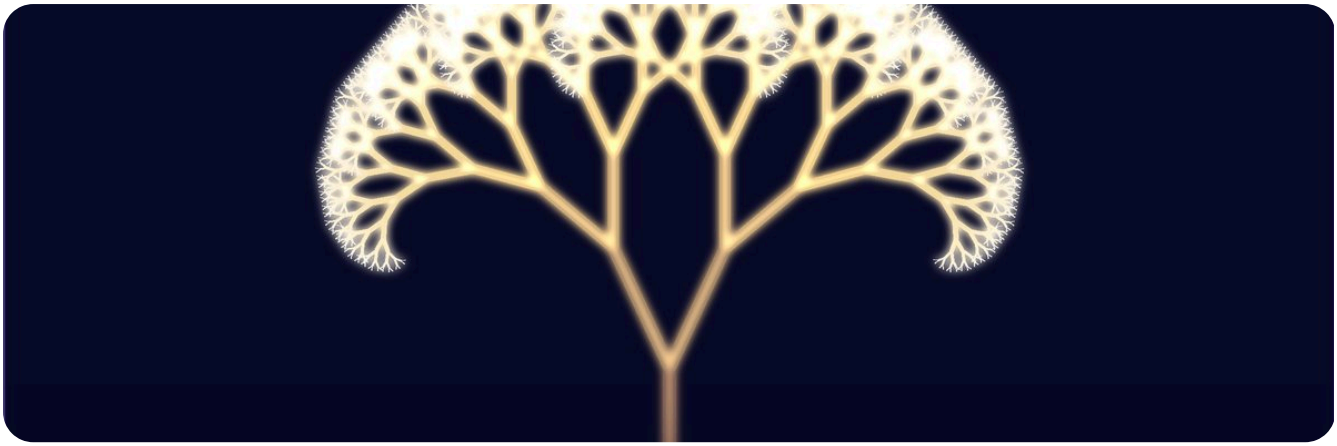
Un sistema de funciones iteradas es una lista corta de aplicaciones, cada una de las cuales encoge el plano. El helecho de Michael Barnsley usa cuatro aplicaciones afines de la forma (x, y) → (a·x + b·y + e, c·x + d·y + f):

Aplicación	a	b	c	d	e	f	Probabilidad	Dibuja
1	0	0	0	0.16	0	0	1%	el tallo
2	0.85	0.04	−0.04	0.85	0	1.6	85%	copias cada vez más pequeñas a lo largo de la fronda
3	0.20	−0.26	0.23	0.22	0	1.6	7%	el folíolo izquierdo
4	−0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	7%	el folíolo derecho

TRES PASOS A MANO

Empieza en (0, 0). Sale la aplicación 2: (0.85·0 + 0.04·0, −0.04·0 + 0.85·0 + 1.6) = (0, 1.6). Vuelve a salir la aplicación 2: (0.04·1.6, 0.85·1.6 + 1.6) = (0.064, 2.96). Sale la aplicación 3: (0.2·0.064 − 0.26·2.96, 0.23·0.064 + 0.22·2.96 + 1.6) = (−0.757, 2.266). Cada punto se dibuja; tras decenas de miles de ellos aparece el helecho.

Veinticuatro números describen un helecho que, de otro modo, necesitaría millones de píxeles. Esta es la idea en la que se basan el juego del caos y la compresión fractal de imágenes.

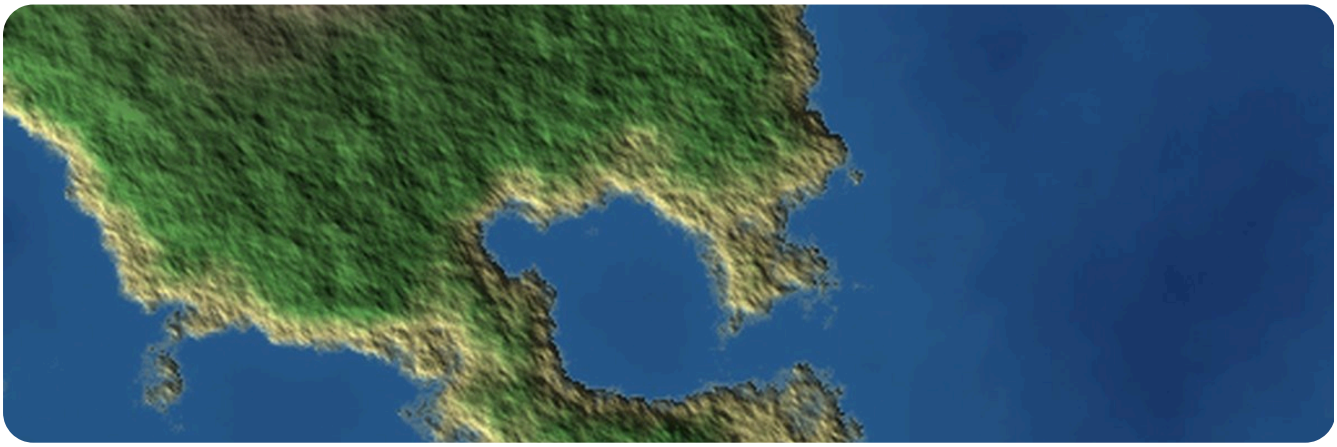


Ejemplo 6 · Hacer crecer una curva a partir de una cadena

Un sistema L reescribe a la vez todos los símbolos de una cadena. Para la curva de Koch: se empieza con `F`; la regla es `F → F+F--F+F`; `F` significa «avanzar dibujando», y `+` y `-` significan «girar 60°».

Paso	Cadena	Símbolos F
0	`F`	1
1	`F+F--F+F`	4
2	`F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F`	16

El número de segmentos se multiplica por 4 en cada paso, mientras que cada segmento se dibuja con un tercio de la longitud, de modo que el dibujo mantiene su tamaño y van surgiendo los conocidos picos de Koch. Si se añaden corchetes, que guardan y restauran la posición del lápiz, la misma idea produce plantas ramificadas; consulta la página Árboles fractales.

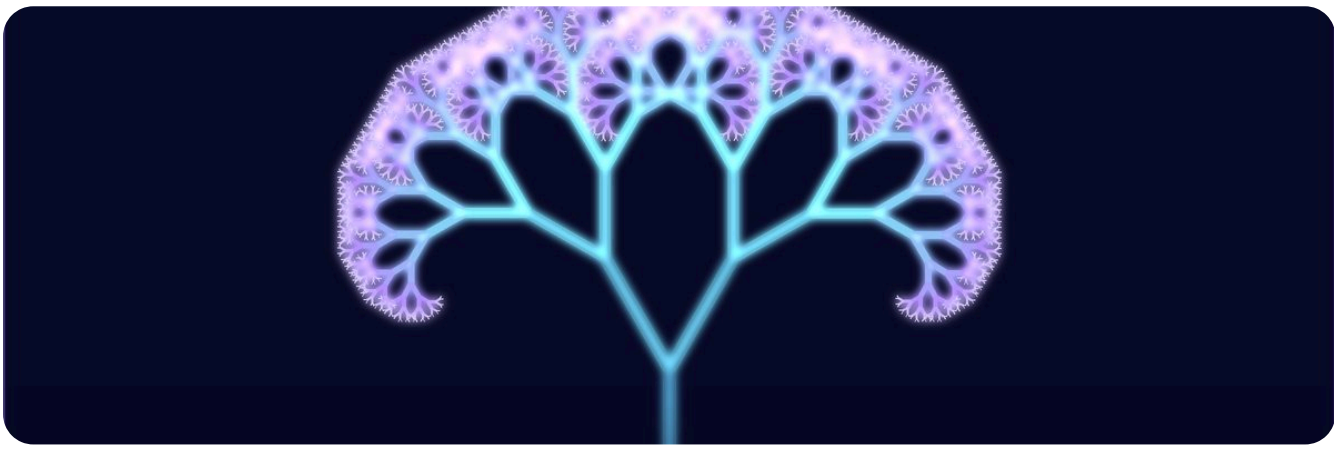


Ejemplo 7 · Una montaña aleatoria a mano

Los fractales naturales son rugosos en un sentido estadístico. El método de *desplazamiento del punto medio* produce esa rugosidad con una moneda y una regla.

1. Dibuja un segmento horizontal con ambos extremos a altura 0.
2. Mueve su punto medio hacia arriba o hacia abajo una cantidad aleatoria entre −1 y +1. Supongamos que los dados dan +0.6.
3. Ahora hay dos segmentos. Mueve el punto medio de cada uno una cantidad aleatoria, pero solo la mitad de grande: entre −0.5 y +0.5. Supongamos −0.2 y +0.3, de modo que las alturas en los puntos de un cuarto pasan a ser 0.3 − 0.2 = 0.1 y 0.3 + 0.3 = 0.6.
4. Repite, reduciendo a la mitad el rango de los desplazamientos aleatorios cada vez.

Tras ocho o diez rondas tienes una cresta montañosa convincente. La rapidez con la que reduces los desplazamientos aleatorios controla la rugosidad: redúcelos en un factor 2^H en cada ronda y el perfil tendrá dimensión $D = 2 - H$. Cuanto menor sea H, más rugosa la cresta. La miniatura «Fractales aleatorios» de la página Tipos de fractales está dibujada exactamente así.



Ejemplo 8 · Medir un objeto real

Puedes estimar en casa la dimensión fractal de una forma real, como el contorno de una hoja, una grieta o una costa en un mapa:

1. Fotografía o escanea la forma con mucho contraste, de modo que el contorno sea una línea oscura y fina.
2. Superpón cuadrículas con cajas de, por ejemplo, 64, 32, 16, 8 y 4 píxeles, y cuenta las cajas que contienen parte de la línea.
3. Representa log(recuento) frente a log(1/tamaño de caja). Descarta las cajas más grandes (todas quedan tocadas) y las más pequeñas (estarías contando píxeles, no el objeto).
4. La pendiente de una recta trazada por los puntos intermedios es la dimensión de conteo de cajas.

RESULTADOS TÍPICOS

Una circunferencia suave da aproximadamente 1.0. El mapa de una costa suele dar valores entre 1.1 y 1.3. La silueta de un árbol o la fotografía de un rayo pueden dar de 1.5 a 1.8. Dos fotógrafos distintos obtendrán valores ligeramente diferentes: el método es una estimación, y el resultado depende del rango de escalas en el que confíes.

Seis ideas erróneas frecuentes

1. **«Los fractales tienen que ser exactamente autosimilares».** La mayoría de los fractales de la naturaleza, y el propio conjunto de Mandelbrot, no lo son. Basta con una semejanza estadística o aproximada.
2. **«Cualquier imagen complicada es un fractal».** La clave no es la complejidad, sino un detalle coherente a través de las escalas. Una nube aleatoria de puntos no sigue ninguna ley de escala.
3. **«Los fractales naturales continúan indefinidamente».** Los reales solo se mantienen en un rango de escalas, de milímetros a kilómetros en el caso de una costa. Por debajo de eso, manda la física.
4. **«La dimensión fractal siempre es una fracción».** La frontera del conjunto de Mandelbrot y la curva de Hilbert tienen ambas dimensión exactamente 2. Lo que importa es que supere la dimensión topológica.
5. **«Los fractales son solo imágenes bonitas».** Se usan en el diseño de antenas, la imagen médica, la ciencia de materiales, las finanzas y los gráficos por ordenador; consulta la sección Aplicaciones.
6. **«Mandelbrot inventó los fractales».** Les dio nombre y los unificó en 1975, pero Cantor, Koch, Sierpiński, Hausdorff, Besicovitch, Julia y Fatou habían estudiado esos objetos décadas antes; consulta las Biografías.

Tabla resumen

Ejemplo	Regla	Número clave	Lección
Conjunto de Cantor	Quitar los tercios centrales	$D \approx 0.631$	Longitud cero, una infinidad no numerable de puntos
Copo de nieve de Koch	Un pico sobre cada tercio central	Área 8/5, perímetro ∞	Área finita, borde infinito
Triángulo de Sierpiński	Conservar 3 de los 4 triángulos de la mitad de tamaño	$D \approx 1.585$	Los tres métodos de dimensión coinciden
Conjunto de Mandelbrot	$z \to z^2 + c$ desde $z = 0$	Radio de escape 2	Las órbitas acotadas dibujan el conjunto
Helecho de Barnsley	4 aplicaciones afines elegidas al azar	24 números	Reglas cortas, formas ricas
Montaña por punto medio	Desplazamientos aleatorios, reducidos a la mitad en cada ronda	$D = 2 - H$	Autosimilitud estadística

¿Quieres ir más allá? El curso gratuito de 21 lecciones convierte estos ejemplos en un itinerario estructurado con cuestionarios y un certificado.

Ponte a prueba

Hay una pregunta por cada lección del curso gratuito, 21 en total. Intenta responderlas sin volver atrás; las respuestas están al final de la guía.

1. ¿Quién acuñó la palabra «fractal», y cuándo?

A. Helge von Koch, 1904
B. Felix Hausdorff, 1918
C. Benoît Mandelbrot, 1975
D. Gaston Julia, 1918

2. ¿Qué tipo de autosimilitud tiene el copo de nieve de Koch?

A. Exacta
B. Cuasi
C. Estadística
D. Ninguna

3. ¿Qué longitud total queda en el conjunto de Cantor?

A. 1/3
B. 2/3
C. 0
D. 1/2

4. Después de un paso, ¿cuántos segmentos tiene la curva de Koch?

A. 2
B. 3
C. 4
D. 6

5. ¿Qué fracción del área queda tras n pasos del triángulo de Sierpiński?

A. $(1/2)^n$
B. $(2/3)^n$
C. $(3/4)^n$
D. $(1/3)^n$

6. ¿Quién publicó la primera curva que llena el espacio?

A. Hilbert, 1891
B. Peano, 1890
C. Cantor, 1883
D. Koch, 1904

7. ¿Qué ocurre con la longitud medida de una costa a medida que la regla se acorta?

A. Disminuye
B. Se mantiene igual
C. Aumenta
D. Se hace cero

8. Una forma consta de 9 copias de sí misma, cada una reducida a 1/3. ¿Cuál es su dimensión de semejanza?

A. 1
B. 1.5
C. 2
D. 3

9. Reducir el tamaño de las cajas a la mitad multiplica el número de cajas por 3. ¿Cuál es la dimensión de cajas?

A. 1.5
B. $\log 3 / \log 2 \approx 1.585$
C. 3
D. 2/3

10. Para s menor que la dimensión de Hausdorff de un conjunto, la medida H^s es...

A. 0
B. Infinita
C. Igual a 1
D. Negativa

11. ¿Qué teorema garantiza que un SFI tiene un único atractor?

A. El teorema de Pitágoras
B. El teorema del punto fijo de Banach
C. El último teorema de Fermat
D. El teorema del valor intermedio

12. En el juego del caos para el triángulo de Sierpiński, ¿qué distancia salta el punto hacia el vértice elegido?

A. Un cuarto del camino
B. La mitad del camino
C. Dos tercios del camino
D. Todo el camino

13. ¿Cómo se reescriben los símbolos en un sistema L?

A. De uno en uno, de izquierda a derecha
B. Todos a la vez, en paralelo
C. Solo el último símbolo
D. Al azar

14. Una traza browniana fraccionaria tiene exponente de Hurst H = 0.7. ¿Cuál es la dimensión de su gráfica?

A. 0.7
B. 1.3
C. 1.7
D. 2.7

15. ¿Cuánto vale $(1 + i)^2$?

A. 2
B. 2i
C. 1 + 2i
D. 0

16. ¿Cuál es el conjunto de Julia para c = 0?

A. Un único punto
B. La circunferencia unidad
C. Un polvo de Cantor
D. La basílica

17. ¿Pertenece c = −1 al conjunto de Mandelbrot?

A. Sí: la órbita de 0 es 0, −1, 0, −1, …
B. No: la órbita escapa
C. Solo en la frontera
D. La pregunta no tiene respuesta

18. ¿En qué año publicó Lorenz su atractor?

A. 1918
B. 1963
C. 1976
D. 1980

19. ¿Qué dimensión generalizada es igual a la dimensión de conteo de cajas?

A. D_0
B. D_1
C. D_2
D. $D\infty$

20. ¿Por qué los fractales naturales solo muestran autosimilitud en un rango limitado de escalas?

A. Por errores de medición
B. Los procesos físicos cambian a escalas muy grandes y muy pequeñas
C. No son fractales de verdad
D. Por la ecuación de Moran

21. ¿Cuál es la principal ventaja de una antena fractal?

A. Es más barata de pintar
B. Es compacta y funciona bien a varias frecuencias
C. No necesita energía
D. Es invisible al radar

Respuestas

1. **C** — Mandelbrot introdujo la palabra en 1975 en su libro *Les objets fractals*.
2. **A** — La curva de Koch está formada por cuatro copias exactas de sí misma reducidas a 1/3.
3. **C** — Tras n pasos la longitud es $(2/3)^n$, que tiende a 0.
4. **C** — El tercio central se sustituye por dos segmentos, lo que da 4 segmentos de longitud 1/3.
5. **C** — Cada paso conserva 3 de los 4 subtriángulos.
6. **B** — La curva de Peano de 1890 fue la primera; la versión más sencilla de Hilbert llegó en 1891.
7. **C** — Una regla más corta sigue bahías y cabos más pequeños, así que la longitud total crece.
8. **C** — $\log 9 / \log 3 = 2$. Un cuadrado dividido en una cuadrícula de 3×3 se comporta exactamente así.
9. **B** — $N(\varepsilon/2) = 3N(\varepsilon)$ da $D = \log 3 / \log 2$.
10. **B** — Por debajo del valor crítico H^s es infinita; por encima, H^s es 0.
11. **B** — El operador de Hutchinson es una contracción, así que el teorema del punto fijo de Banach da un único conjunto fijo.
12. **B** — La razón de salto 1/2 coincide con el factor de escala de las tres aplicaciones.
13. **B** — La reescritura en paralelo es lo que distingue los sistemas L de las gramáticas ordinarias.
14. **B** — $D = 2 - H = 1.3$.
15. **B** — $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$.
16. **B** — Para $z \to z^2$, los puntos de la circunferencia unidad permanecen en ella; los del interior van a 0 y los del exterior, al infinito.
17. **A** — La órbita alterna entre 0 y −1, así que permanece acotada.
18. **B** — Lorenz publicó «Deterministic Nonperiodic Flow» en 1963.
19. **A** — D_0 cuenta las cajas sin ponderarlas por la masa.
20. **B** — Fuera del rango de escalas entra en juego otra física, por ejemplo los granos de arena en el extremo inferior de una costa.
21. **B** — El contorno fractal plegado ofrece un rendimiento multibanda en un tamaño reducido.

Sigue en línea

En forefractal.com puedes seguir el curso gratuito de geometría fractal en 21 lecciones, con cuestionarios breves y un certificado al final. Cada lección tiene figuras en vivo que puedes ampliar, modificar y explorar.

El sitio también ofrece exploradores interactivos de los conjuntos de Mandelbrot y de Julia, el juego del caos y los árboles fractales, artículos sobre los fractales en la naturaleza, la ciencia y el arte, y presentaciones para docentes. Todo es gratuito y está disponible en siete idiomas.

© 2026 Fractalist · ForeFractal.com · libre para imprimir y compartir en la enseñanza sin fines comerciales