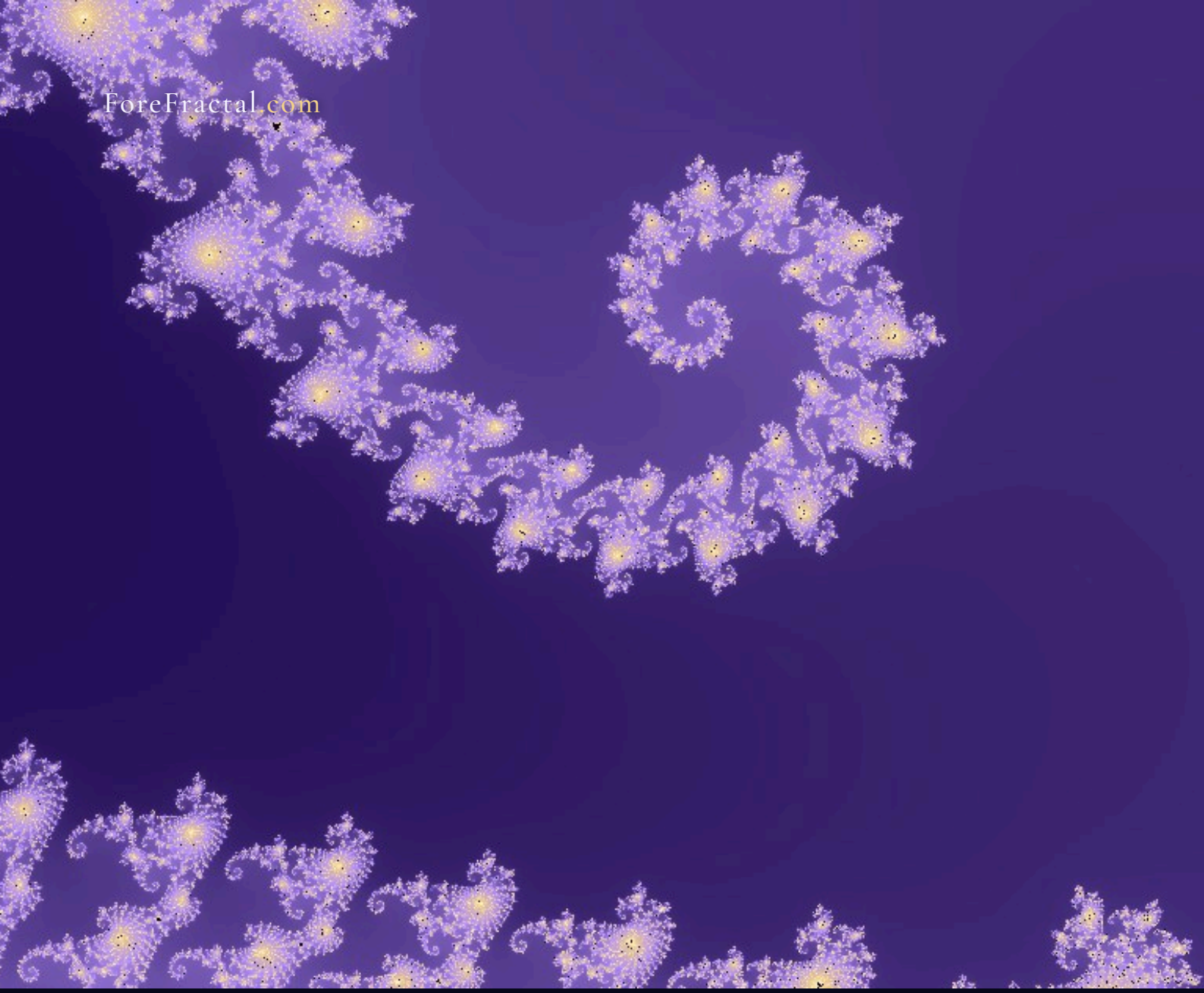


Un guide gratuit des *fractales*

Autosimilarité, dimension et ensemble de Mandelbrot, pas à pas

par Fractalist · ForeFractal.com

Comment utiliser ce guide

Ce guide présente les fractales, ces formes qui montrent des détails à toutes les échelles, des côtes et des fougères jusqu'à l'ensemble de Mandelbrot. Il couvre le même contenu que le cours en ligne gratuit : lisez-le du début à la fin, ou allez directement au chapitre dont vous avez besoin.

Aucune connaissance au-delà de l'algèbre du lycée n'est nécessaire. Quand des logarithmes ou des nombres complexes apparaissent, le guide explique sur place ce qu'il faut savoir. Les exemples corrigés détaillent chaque étape d'un calcul ; essayez chacun d'eux vous-même avant de lire la solution.

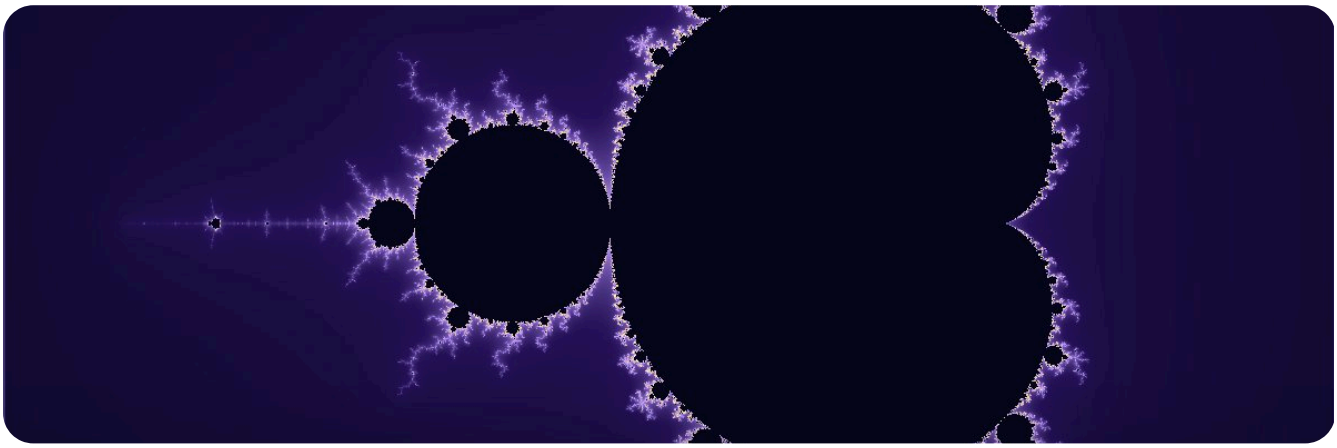
À la fin, vous trouverez une question de test pour chaque leçon du cours, avec les réponses sur une page séparée. Les enseignants sont invités à imprimer le guide et à l'utiliser comme document à distribuer, pour les devoirs ou pour les révisions.

Sommaire

1. Ce qu'est vraiment une fractale
2. Exemple 1 · L'ensemble de Cantor, pas à pas
3. Exemple 2 · Le flocon de Koch en chiffres
4. Exemple 3 · La dimension, mesurée de trois façons
5. Exemple 4 · Itérer $z^2 + c$ à la main
6. Exemple 5 · Construire une fougère avec quatre règles
7. Exemple 6 · Faire pousser une courbe à partir d'une chaîne
8. Exemple 7 · Une montagne aléatoire à la main
9. Exemple 8 · Mesurer un objet réel
10. Six idées reçues
11. Tableau récapitulatif
12. Testez-vous
13. Réponses
14. Continuer en ligne

Les fractales expliquées en profondeur, avec des exemples détaillés

Cette page est la version longue. Au lieu de se contenter d'images, chaque idée est développée avec de vrais nombres que vous pouvez vérifier sur papier ou à la calculatrice. Lisez-la d'une traite ou allez directement à l'exemple dont vous avez besoin.



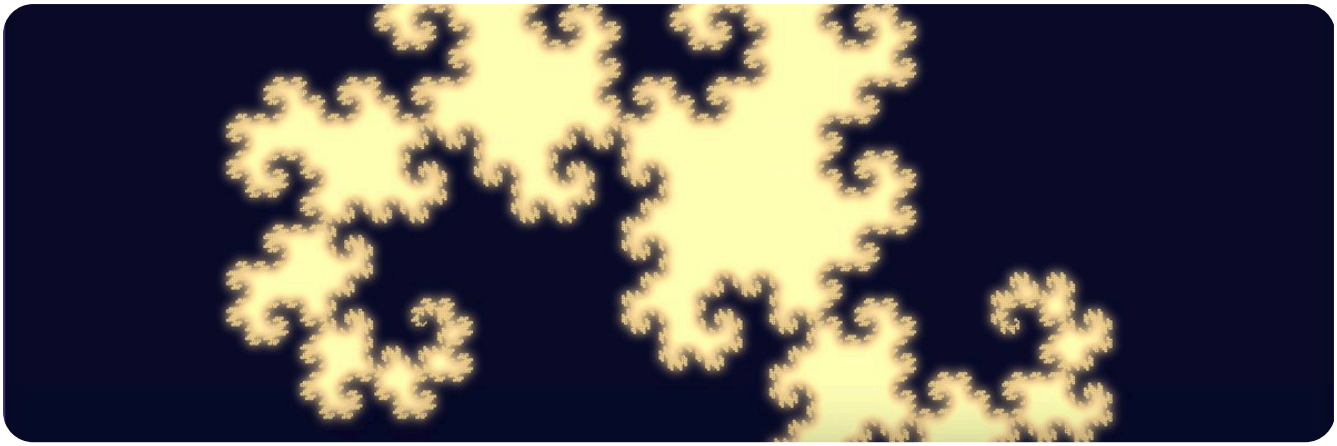
Ce qu'est vraiment une fractale

La géométrie ordinaire décrit des formes qui deviennent plus simples quand on les regarde de près. Agrandissez un petit morceau de cercle et il ressemble à une droite ; agrandissez une sphère et elle ressemble à un plan. Le calcul différentiel repose sur ce fait : en zoomant suffisamment, tout ce qui est lisse devient linéaire.

Une fractale est une forme pour laquelle cela n'arrive jamais. Quel que soit le grossissement, de nouveaux détails continuent d'apparaître, et ces détails sont de même nature que les précédents. Trois ingrédients vont généralement de pair :

1. **Des détails à toutes les échelles.** Il n'existe aucun niveau de zoom auquel la forme devient lisse.
2. **Une forme d'autosimilarité.** Les petites parties ressemblent au tout, soit exactement (la courbe de von Koch), soit approximativement (l'ensemble de Mandelbrot), soit seulement statistiquement (une côte).
3. **Une dimension fractionnaire.** Un simple nombre, généralement compris entre les nombres entiers habituels, mesure à quel point la forme remplit l'espace.

Un quatrième ingrédient, pratique celui-là, explique pourquoi les fractales comptent : elles sont généralement produites par une *règle très courte appliquée encore et encore*. C'est l'idée d'*itération*, et les huit exemples ci-dessous reposent tous sur elle.



Exemple 1 · L'ensemble de Cantor, pas à pas

Partez de l'intervalle de 0 à 1. Retirez le tiers central ouvert, ce qui laisse [0, 1/3] et [2/3, 1]. Retirez à nouveau le tiers central de chaque morceau restant, et recommencez indéfiniment.

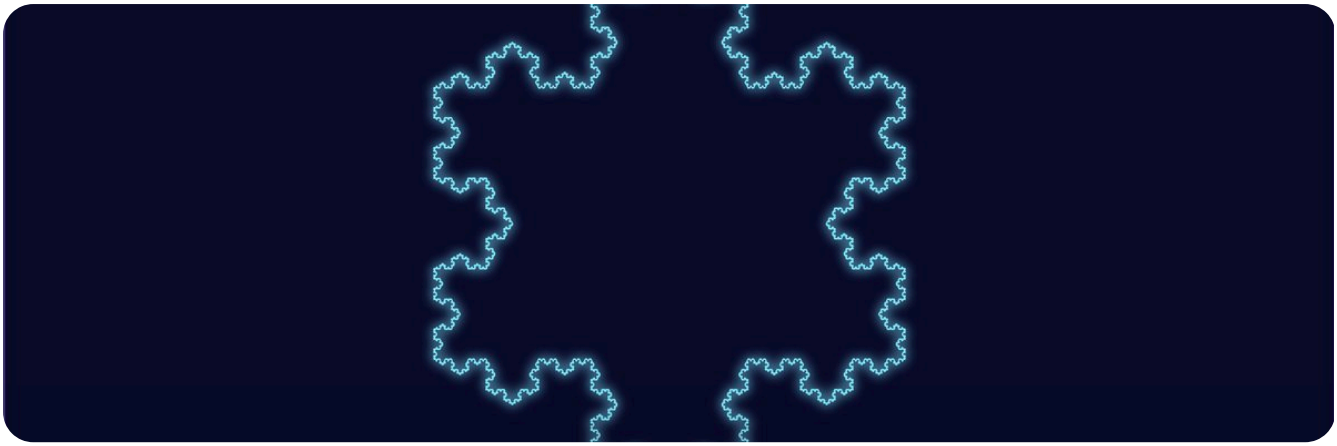
Étape n	Morceaux 2^n	Longueur de chacun 3^{-n}	Longueur totale $(2/3)^n$
0	1	1	1
1	2	0.3333	0.6667
2	4	0.1111	0.4444
3	8	0.0370	0.2963
4	16	0.0123	0.1975
5	32	0.0041	0.1317

La longueur totale est multipliée par 2/3 à chaque étape et tend vers zéro. Pourtant, quelque chose d'infini subsiste. Écrivez les nombres en base 3 : retirer le tiers central revient à retirer les nombres dont le premier chiffre ternaire est forcément 1. Ce qui reste, ce sont exactement les nombres qui peuvent s'écrire uniquement avec les chiffres 0 et 2.

VÉRIFICATION DÉTAILLÉE

1/4 appartient-il à l'ensemble de Cantor ? En base 3, $1/4 = 0.020202\ldots_3$ (car $0.0202\ldots_3 = 2/9 + 2/81 + \ldots = (2/9)/(1 - 1/9) = 1/4$). Il n'utilise que des 0 et des 2, donc oui. Il appartient à l'ensemble bien qu'il ne soit l'extrémité d'aucun intervalle retiré.

Comme chaque suite infinie de 0 et de 2 donne un point différent, l'ensemble de Cantor a autant de points que l'intervalle tout entier. Un ensemble peut être de longueur nulle tout en étant indénombrable. Sa dimension, que nous calculons dans l'exemple 3, vaut environ 0.6309 : plus qu'un semis de points, moins qu'une ligne.



Exemple 2 · Le flocon de Koch en chiffres

Partez d'un triangle équilatéral de côté 1. Sur le tiers central de chaque côté, construisez un triangle équilatéral pointant vers l'extérieur, puis effacez sa base. Chaque côté devient quatre côtés, chacun trois fois plus court. Recommencez.

Étape n	**Côtés $3 \cdot 4^n$**	**Périmètre $3 \cdot (4/3)^n$**	**Aire (initiale = 1)**
0	3	3.000	1.0000
1	12	4.000	1.3333
2	48	5.333	1.4815
3	192	7.111	1.5473
4	768	9.481	1.5766
∞	∞	∞	1.6000

Pourquoi l'aire converge. À l'étape 1, on ajoute 3 triangles, chacun d'aire égale à 1/9 de l'aire initiale : +3/9. À l'étape 2, on ajoute 12 triangles d'aire 1/81 : +12/81 = +(3/9)·(4/9). Chaque étape ajoute les 4/9 de ce qu'ajoutait la précédente. Le total ajouté est une série géométrique :

$$3/9 \cdot (1 + 4/9 + (4/9)^2 + \ldots) = (1/3) \cdot 1/(1 - 4/9) = 3/5$$

Le flocon achevé a donc une aire égale à 1 + 3/5 = 8/5 de celle du triangle de départ, tandis que son périmètre, multiplié par 4/3 à chaque étape, croît sans limite. Une aire finie est enclose par une frontière de longueur infinie. Vous pouvez observer ce phénomène avec le curseur de la page Autosimilarité.



Exemple 3 · La dimension, mesurée de trois façons

Méthode 1 : compter les copies autosimilaires

Coupez un segment en deux : 2 copies à l'échelle 1/2. Découpez un carré selon une grille 2×2 : 4 copies. Un cube : 8 copies. Dans chaque cas $N = (1/s)^D$, où N est le nombre de copies, s le facteur d'échelle et D la dimension. On résout pour D :

```
D = log N / log(1/s)
```

Forme	N	1/s	D = log N / log(1/s)
Ensemble de Cantor	2	3	log 2 / log 3 = 0.6309
Courbe de von Koch	4	3	log 4 / log 3 = 1.2619
Triangle de Sierpiński	3	2	log 3 / log 2 = 1.5850
Tapis de Sierpiński	8	3	log 8 / log 3 = 1.8928
Éponge de Menger	20	3	log 20 / log 3 = 2.7268

Méthode 2 : le comptage de boîtes

Recouvrez la forme d'une grille de boîtes de côté ε et comptez combien de boîtes N(ε) la touchent. Pour le triangle de Sierpiński tracé dans un carré unité :

Taille des boîtes ε	Boîtes N(ε)	log N / log(1/ε)
1/2	3	1.585
1/4	9	1.585
1/8	27	1.585
1/16	81	1.585

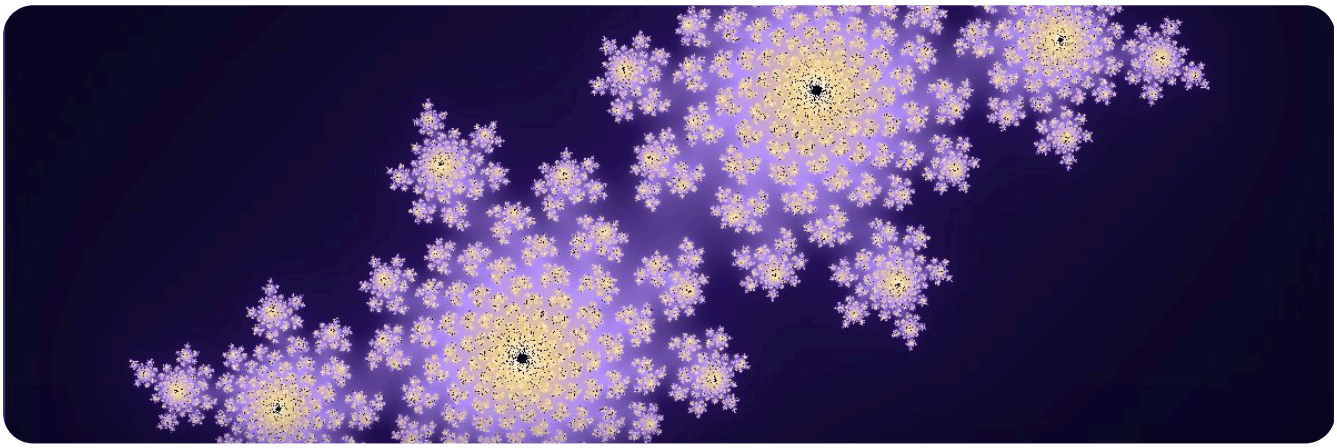
Chaque fois que la taille des boîtes est divisée par deux, le nombre de boîtes triple ; la pente de log N en fonction de log(1/ε) vaut donc log 3 / log 2, le même résultat qu'avec la méthode 1. Pour un objet réel, les comptages ne sont pas aussi nets : on reporte les points sur un graphique et on ajuste une droite sur la plage d'échelles intermédiaire.

Méthode 3 : la méthode du compas (Richardson)

Faites « marcher » un compas à pointes sèches le long d'une côte. Avec une grande ouverture, vous sautez les petites baies ; avec une plus petite, vous les suivez, si bien que la longueur mesurée L augmente à mesure que l'étalon ε diminue : $L(\varepsilon) \approx F \cdot \varepsilon^{1-D}$.

EXEMPLE DÉTAILLÉ (CHIFFRES INDICATIFS)

Supposons qu'un étalon de 100 km donne une longueur de 2 800 km et un étalon de 10 km, 5 000 km. L'étalon a été divisé par 10 et la longueur multipliée par 5000/2800 = 1.786. Alors $1 - D = -\log(1.786)/\log(10) = -0.252$, d'où $D \approx 1.25$, la valeur que Mandelbrot citait pour la côte ouest de la Grande-Bretagne.



Exemple 4 · Itérer $z^2 + c$ à la main

L'ensemble de Mandelbrot est l'ensemble des nombres c pour lesquels la suite 0, c, $c^2 + c$, … reste bornée. On peut tester des points avec de la simple arithmétique.

c	Orbite de 0	Verdict
−1	0, −1, 0, −1, 0, …	Cycle de période 2 : **dedans**
1	0, 1, 2, 5, 26, 677, …	Explose : **dehors**
−2	0, −2, 2, 2, 2, …	Bloquée à 2 : **dedans** (la pointe gauche)
i	0, i, −1 + i, −i, −1 + i, −i, …	Tombe sur un 2-cycle : **dedans**, sur la frontière
0.25	0, 0.25, 0.3125, 0.3477, … → 0.5	S'approche lentement de 0.5 : **dedans** (le point de rebroussement)
0.3	0, 0.3, 0.39, 0.4521, 0.5044, … 1.0373, 1.3760, 2.1933	Dépasse 2 à l'étape 12 : **dehors**

COMMENT ÉLEVER UN NOMBRE COMPLEXE AU CARRÉ

$(-1 + i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$. En ajoutant c = i, on obtient −i. Puis $(-i)^2 = -1$, et en ajoutant i on retrouve −1 + i. L'orbite est prise dans une boucle, donc i appartient à l'ensemble.

La dernière ligne montre pourquoi les images exigent de nombreuses itérations près de la frontière : c = 0.3 est à l'extérieur, mais de peu, et il faut douze étapes pour le révéler. Les points plus proches de la frontière en demandent des centaines ou des millions. Dès que |z| dépasse 2, l'orbite s'échappe à coup sûr : c'est le critère d'arrêt qu'utilisent tous les programmes de Mandelbrot. Essayez ces valeurs sur la page Ensembles de Julia : c = −1 donne la « basilique », c = i une dendrite.



Exemple 5 · Construire une fougère avec quatre règles

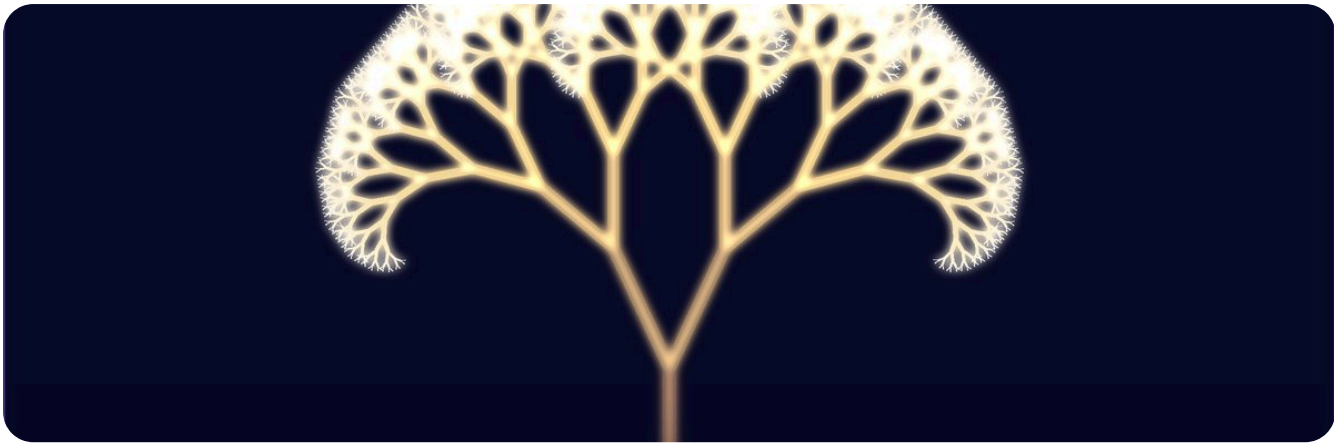
Un système de fonctions itérées est une courte liste d'applications qui contractent chacune le plan. La fougère de Michael Barnsley utilise quatre applications affines de la forme (x, y) → (a·x + b·y + e, c·x + d·y + f) :

Application	a	b	c	d	e	f	Probabilité	Dessine
1	0	0	0	0.16	0	0	1%	la tige
2	0.85	0.04	−0.04	0.85	0	1.6	85%	des copies de plus en plus petites le long de la fronde
3	0.20	−0.26	0.23	0.22	0	1.6	7%	la foliole gauche
4	−0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	7%	la foliole droite

TROIS ÉTAPES À LA MAIN

Partez de (0, 0). Le tirage donne l'application 2 : (0.85·0 + 0.04·0, −0.04·0 + 0.85·0 + 1.6) = (0, 1.6). Encore l'application 2 : (0.04·1.6, 0.85·1.6 + 1.6) = (0.064, 2.96). Puis l'application 3 : (0.2·0.064 − 0.26·2.96, 0.23·0.064 + 0.22·2.96 + 1.6) = (−0.757, 2.266). Chaque point est tracé ; après quelques dizaines de milliers de points, la fougère apparaît.

Vingt-quatre nombres décrivent une fougère qui exigerait sinon des millions de pixels. C'est l'idée qui sous-tend le jeu du chaos ainsi que la compression fractale d'images.

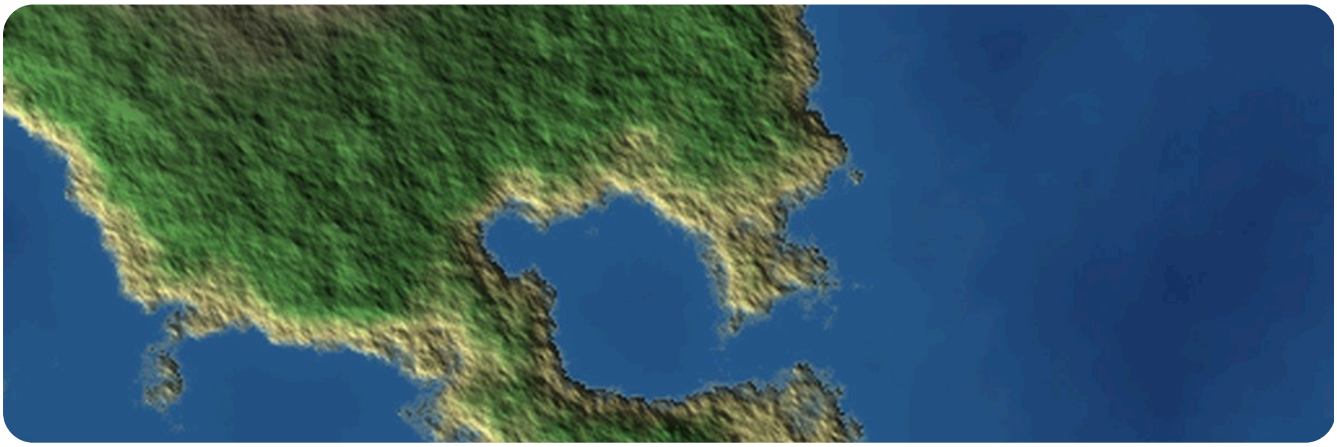


Exemple 6 · Faire pousser une courbe à partir d'une chaîne

Un L-système réécrit simultanément chaque symbole d'une chaîne. Pour la courbe de von Koch : on part de `F` ; la règle est `F → F+F−−F+F` ; `F` signifie « avancer en traçant », `+` et `−` signifient « tourner de 60° ».

Étape	Chaîne	Symboles F
0	F	1
1	F+F−−F+F	4
2	F+F−−F+F+F+F−−F+F−−F+F−−F+F+F+F−−F+F	16

Le nombre de segments est multiplié par 4 à chaque étape, tandis que chaque segment est tracé trois fois plus court : le dessin garde la même taille et se couvre des bosses caractéristiques de la courbe de von Koch. En ajoutant des crochets, qui enregistrent puis restaurent la position du crayon, la même idée produit des plantes ramifiées ; voyez la page Arbres fractals.

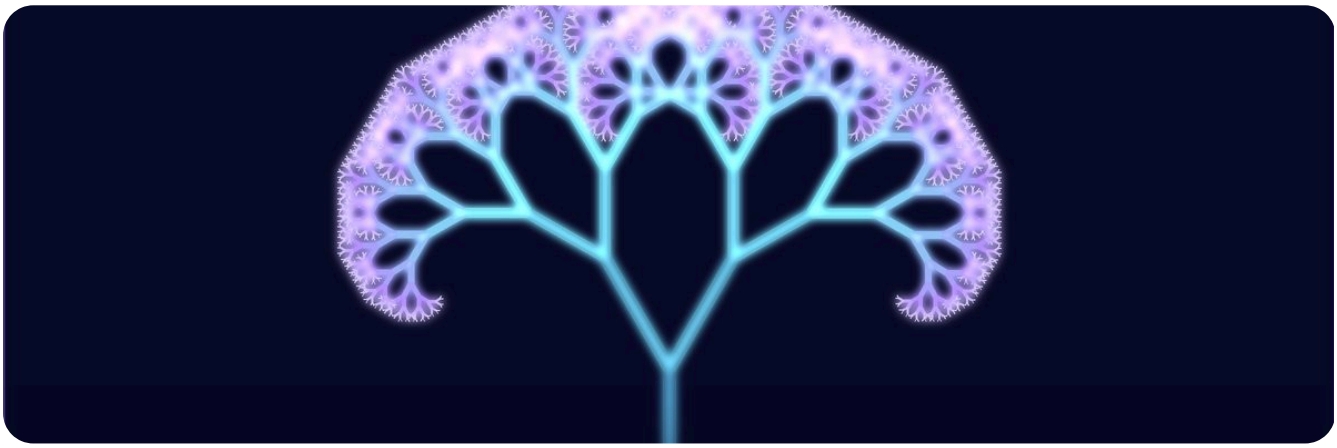


Exemple 7 · Une montagne aléatoire à la main

Les fractales naturelles sont irrégulières au sens statistique. La méthode du *déplacement du point milieu* produit ce genre d'irrégularité avec une pièce de monnaie et une règle.

1. Tracez un segment horizontal dont les deux extrémités sont à la hauteur 0.
2. Déplacez son milieu vers le haut ou vers le bas d'une quantité aléatoire comprise entre −1 et +1. Disons que les dés donnent +0.6.
3. Il y a maintenant deux segments. Déplacez chacun de leurs milieux d'une quantité aléatoire, mais deux fois plus petite : entre −0.5 et +0.5. Disons −0.2 et +0.3 ; les hauteurs aux quarts deviennent alors 0.3 − 0.2 = 0.1 et 0.3 + 0.3 = 0.6.
4. Recommencez en divisant par deux l'amplitude des déplacements aléatoires à chaque fois.

Après huit ou dix tours, vous obtenez une crête montagneuse convaincante. La vitesse à laquelle vous réduisez les déplacements aléatoires règle l'irrégularité : divisez-les par un facteur 2^H à chaque tour et le profil a pour dimension D = 2 − H. Plus H est petit, plus la crête est accidentée. La vignette « Fractales aléatoires » de la page Types de fractales est dessinée exactement de cette façon.



Exemple 8 · Mesurer un objet réel

Vous pouvez estimer chez vous la dimension fractale d'une forme réelle, comme le contour d'une feuille, une fissure ou une côte sur une carte :

1. Photographiez ou numérisez la forme avec un fort contraste, de sorte que le contour soit une fine ligne sombre.
2. Superposez des grilles dont les boîtes mesurent par exemple 64, 32, 16, 8 et 4 pixels, et comptez les boîtes qui contiennent une partie de la ligne.
3. Reportez log(nombre de boîtes) en fonction de log(1/taille des boîtes). Ignorez les plus grandes boîtes (toutes sont touchées) et les plus petites (vous compteriez des pixels, pas l'objet).
4. La pente d'une droite passant par les points intermédiaires est la dimension de comptage de boîtes.

RÉSULTATS TYPIQUES

Un cercle lisse donne environ 1.0. Une côte sur une carte donne souvent des valeurs entre 1.1 et 1.3. La silhouette d'un arbre ou la photographie d'un éclair peut donner de 1.5 à 1.8. Deux photographes obtiendront des valeurs légèrement différentes : la méthode fournit une estimation, et le résultat dépend de la plage d'échelles jugée fiable.

Six idées reçues

1. **« Les fractales doivent être exactement autosimilaires. »** La plupart des fractales naturelles, et l'ensemble de Mandelbrot lui-même, ne le sont pas. Une similarité statistique ou approximative suffit.
2. **« Toute image compliquée est une fractale. »** La complexité n'est pas l'essentiel ; ce qui compte, c'est un détail cohérent d'une échelle à l'autre. Un nuage de points aléatoire n'obéit à aucune loi d'échelle.
3. **« Les fractales naturelles se prolongent à l'infini. »** Les vraies ne sont valables que sur une plage d'échelles, du millimètre au kilomètre pour une côte. En deçà, c'est la physique qui prend le relais.
4. **« La dimension fractale est toujours fractionnaire. »** La frontière de l'ensemble de Mandelbrot et la courbe de Hilbert ont toutes deux une dimension exactement égale à 2. Ce qui compte, c'est qu'elle dépasse la dimension topologique.
5. **« Les fractales ne sont que de jolies images. »** Elles servent à la conception d'antennes, à l'imagerie médicale, à la science des matériaux, à la finance et à l'infographie ; voyez la rubrique Applications.
6. **« Mandelbrot a inventé les fractales. »** Il les a nommées et unifiées en 1975, mais Cantor, Koch, Sierpiński, Hausdorff, Besicovitch, Julia et Fatou avaient étudié ces objets des décennies plus tôt ; voyez les Biographies.

Tableau récapitulatif

Exemple	Règle	Nombre clé	Leçon
Ensemble de Cantor	Retirer les tiers centraux	$D \approx 0.631$	Longueur nulle, une infinité indénombrable de points
Flocon de Koch	Une bosse sur chaque tiers central	Aire 8/5, périmètre ∞	Aire finie, bord infini
Triangle de Sierpiński	Garder 3 des 4 triangles de taille moitié	$D \approx 1.585$	Trois méthodes de calcul de la dimension concordent
Ensemble de Mandelbrot	$z \to z^2 + c$ à partir de $z = 0$	Rayon d'échappement 2	Les orbites bornées dessinent l'ensemble
Fougère de Barnsley	4 applications affines, choisies au hasard	24 nombres	Règles courtes, formes riches
Montagne par point milieu	Déplacements aléatoires, divisés par deux à chaque tour	$D = 2 - H$	Autosimilarité statistique

Envie d'aller plus loin ? Le cours gratuit en 21 leçons transforme ces exemples en un parcours structuré, avec quiz et certificat.

Testez-vous

Il y a une question pour chaque leçon du cours gratuit, 21 en tout. Essayez d'y répondre sans revenir en arrière ; les réponses se trouvent à la fin du guide.

1. Qui a forgé le mot « fractale », et quand ?

A. Helge von Koch, 1904
B. Felix Hausdorff, 1918
C. Benoît Mandelbrot, 1975
D. Gaston Julia, 1918

2. Quel type d'autosimilarité le flocon de Koch possède-t-il ?

A. Exacte
B. Quasi
C. Statistique
D. Aucune

3. Quelle longueur totale reste-t-il dans l'ensemble de Cantor ?

A. 1/3
B. 2/3
C. 0
D. 1/2

4. Après une étape, combien de segments la courbe de von Koch compte-t-elle ?

A. 2
B. 3
C. 4
D. 6

5. Quelle fraction de l'aire reste-t-il après n étapes de construction du triangle de Sierpiński ?

A. $(1/2)^n$
B. $(2/3)^n$
C. $(3/4)^n$
D. $(1/3)^n$

6. Qui a publié la première courbe remplissant l'espace ?

A. Hilbert, 1891
B. Peano, 1890
C. Cantor, 1883
D. Koch, 1904

7. Qu'arrive-t-il à la longueur mesurée d'une côte quand la règle raccourcit ?

A. Elle diminue
B. Elle reste la même
C. Elle augmente
D. Elle devient nulle

8. Une forme est constituée de 9 copies d'elle-même, chacune réduite d'un facteur 1/3. Quelle est sa dimension d'autosimilarité ?

A. 1
B. 1,5
C. 2
D. 3

9. Diviser la taille des boîtes par deux multiplie le nombre de boîtes par 3. Quelle est la dimension de comptage de boîtes ?

A. 1,5
B. $\log 3 / \log 2 \approx 1{,}585$
C. 3
D. 2/3

10. Pour s inférieur à la dimension de Hausdorff d'un ensemble, la mesure H^s est…

A. nulle
B. infinie
C. égale à 1
D. négative

11. Quel théorème garantit qu'un IFS possède un attracteur unique ?

A. Le théorème de Pythagore
B. Le théorème du point fixe de Banach
C. Le dernier théorème de Fermat
D. Le théorème des valeurs intermédiaires

12. Dans le jeu du chaos du triangle de Sierpiński, quelle distance le point parcourt-il vers le sommet choisi ?

A. Un quart du chemin
B. La moitié du chemin
C. Les deux tiers du chemin
D. Tout le chemin

13. Comment les symboles sont-ils réécrits dans un L-système ?

A. Un par un, de gauche à droite
B. Tous à la fois, en parallèle
C. Seulement le dernier symbole
D. Au hasard

14. Un tracé brownien fractionnaire a un exposant de Hurst H = 0,7. Quelle est la dimension de son graphe ?

A. 0,7
B. 1,3
C. 1,7
D. 2,7

15. Combien vaut $(1 + i)^2$?

A. 2
B. 2i
C. 1 + 2i
D. 0

16. Quel est l'ensemble de Julia pour c = 0 ?

A. Un seul point
B. Le cercle unité
C. Une poussière de Cantor
D. La basilique

17. c = −1 appartient-il à l'ensemble de Mandelbrot ?

A. Oui : l'orbite de 0 est 0, −1, 0, −1, …
B. Non : l'orbite s'échappe
C. Seulement sur la frontière
D. La question n'a pas de réponse

18. En quelle année Lorenz a-t-il publié son attracteur ?

A. 1918
B. 1963
C. 1976
D. 1980

19. Quelle dimension généralisée est égale à la dimension de comptage de boîtes ?

A. D_0
B. D_1
C. D_2
D. $D\infty$

20. Pourquoi les fractales naturelles ne sont-elles autosimilaires que sur un domaine d'échelles limité ?

A. À cause des erreurs de mesure
B. Les processus physiques changent aux très grandes et aux très petites échelles
C. Ce ne sont pas de vraies fractales
D. À cause de l'équation de Moran

21. Quel est le principal avantage d'une antenne fractale ?

A. Elle est moins chère à peindre
B. Elle est compacte et fonctionne bien sur plusieurs fréquences
C. Elle n'a pas besoin d'alimentation
D. Elle est invisible aux radars

Réponses

1. **C** — Mandelbrot a introduit le mot en 1975 dans son livre *Les objets fractals*.
2. **A** — La courbe de von Koch est formée de quatre copies exactes d'elle-même réduites d'un facteur 1/3.
3. **C** — Après n étapes, la longueur vaut $(2/3)^n$, qui tend vers 0.
4. **C** — Le tiers central est remplacé par deux segments, ce qui donne 4 segments de longueur 1/3.
5. **C** — Chaque étape conserve 3 des 4 sous-triangles.
6. **B** — La courbe de Peano, en 1890, est la première ; la version simplifiée de Hilbert a suivi en 1891.
7. **C** — Une règle plus courte suit des baies et des caps plus petits ; la longueur totale augmente donc.
8. **C** — log 9 / log 3 = 2. Un carré divisé en une grille de 3×3 se comporte exactement ainsi.
9. **B** — $N(\varepsilon/2) = 3N(\varepsilon)$ donne $D = \log 3 / \log 2$.
10. **B** — En dessous de la valeur critique, H^s est infinie ; au-dessus, H^s est nulle.
11. **B** — L'opérateur de Hutchinson est une contraction ; le théorème du point fixe de Banach fournit donc un ensemble fixe unique.
12. **B** — Le rapport de saut 1/2 correspond au facteur d'échelle des trois applications.
13. **B** — La réécriture parallèle est ce qui distingue les L-systèmes des grammaires ordinaires.
14. **B** — $D = 2 - H = 1{,}3$.
15. **B** — $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$.
16. **B** — Pour $z \to z^2$, les points du cercle unité y restent ; l'intérieur tend vers 0, l'extérieur vers l'infini.
17. **A** — L'orbite alterne entre 0 et −1 ; elle reste donc bornée.
18. **B** — Lorenz a publié « Deterministic Nonperiodic Flow » en 1963.
19. **A** — D_0 compte les boîtes sans les pondérer par leur masse.
20. **B** — Au-delà du domaine d'échelle, une physique différente prend le relais, par exemple les grains de sable tout en bas de l'échelle d'une côte.
21. **B** — Le contour fractal replié permet un fonctionnement multibande sous un faible encombrement.

Continuer en ligne

Sur forefractal.com, vous pouvez suivre le cours gratuit de géométrie fractale en 21 leçons, avec de courts quiz et un certificat à la fin. Chaque leçon comporte des figures animées que vous pouvez zoomer, modifier et explorer.

Le site propose aussi des explorateurs interactifs pour les ensembles de Mandelbrot et de Julia, le jeu du chaos et les arbres fractals, des articles sur les fractales dans la nature, les sciences et l'art, ainsi que des présentations pour les enseignants. Tout est gratuit et disponible en sept langues.

© 2026 Fractalist · ForeFractal.com · libre d’impression et de partage pour un enseignement non commercial