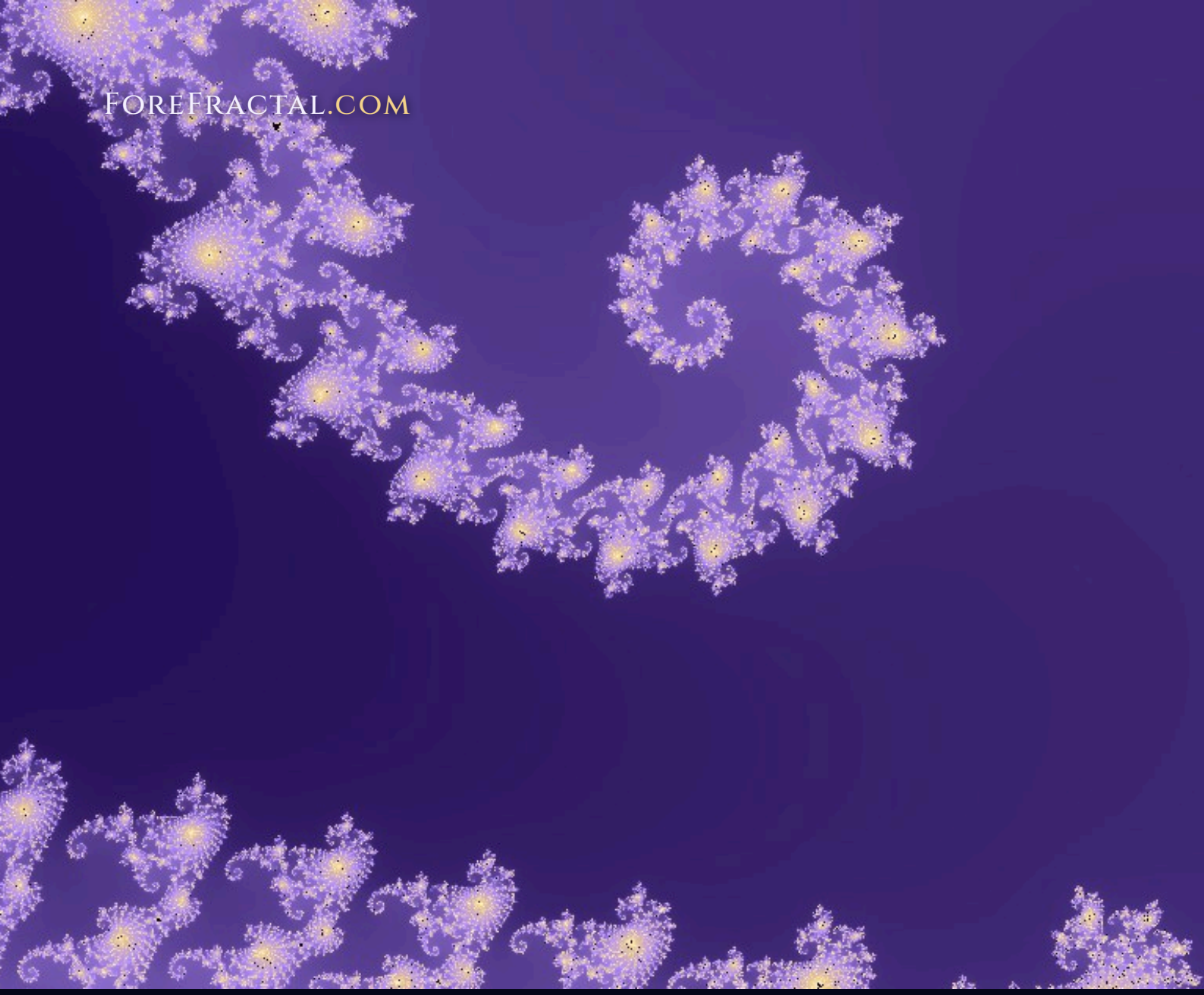


Бесплатное пособие о *фракталах*

Самоподобие, размерность и множество Мандельброта шаг за шагом

Fractalist · ForeFractal.com

Как пользоваться пособием

Это пособие знакомит с фракталами — формами, у которых есть детали на любом масштабе, от береговых линий и папоротников до множества Мандельброта. Оно охватывает тот же материал, что и бесплатный онлайн-курс: читай его от начала до конца или сразу переходи к нужной главе.

Понадобится только школьная алгебра. Там, где появляются логарифмы или комплексные числа, пособие сразу объясняет всё необходимое. Разобранные примеры показывают каждый шаг вычисления; сначала попробуй решить каждый сам, а потом читай решение.

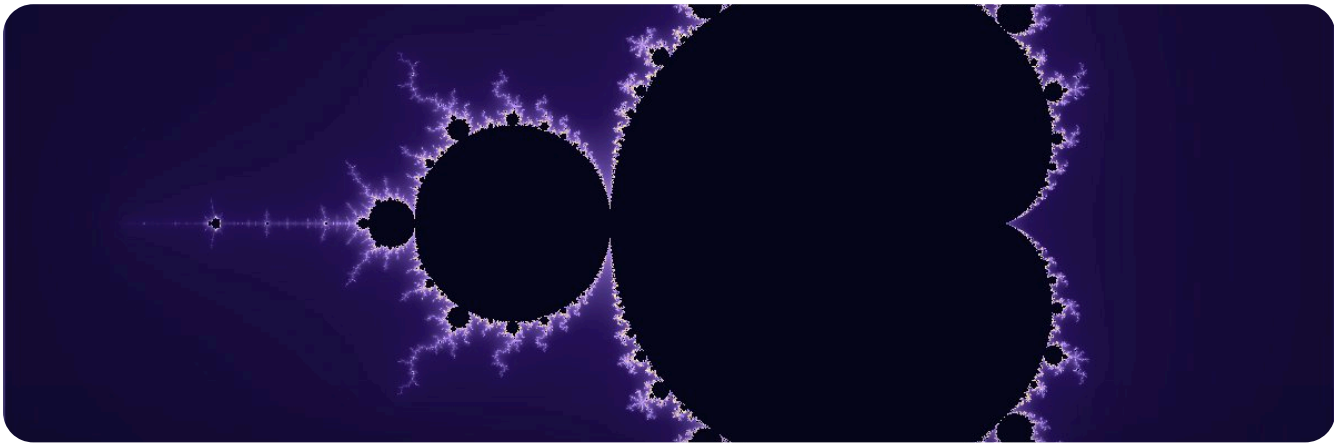
В конце ты найдёшь по одному проверочному вопросу к каждому уроку курса, а ответы — на отдельной странице. Учителя могут свободно печатать пособие и использовать его как раздаточный материал, для домашних заданий или повторения.

Содержание

1. Что такое фрактал на самом деле
2. Пример 1 · Множество Кантора шаг за шагом
3. Пример 2 · Снежинка Коха в числах
4. Пример 3 · Размерность, измеренная тремя способами
5. Пример 4 · Итерируем $z^2 + c$ вручную
6. Пример 5 · Строим папоротник по четырём правилам
7. Пример 6 · Выращиваем кривую из строки
8. Пример 7 · Случайная гора вручную
9. Пример 8 · Измеряем реальный объект
10. Шесть распространённых заблуждений
11. Сводная таблица
12. Проверь себя
13. Ответы
14. Продолжай онлайн

Фракталы: подробное объяснение с разобранными примерами

Это подробная версия. Вместо одних лишь картинок каждая идея разобрана на настоящих числах, которые можно проверить на бумаге или с калькулятором. Читай подряд или сразу переходи к нужному примеру.



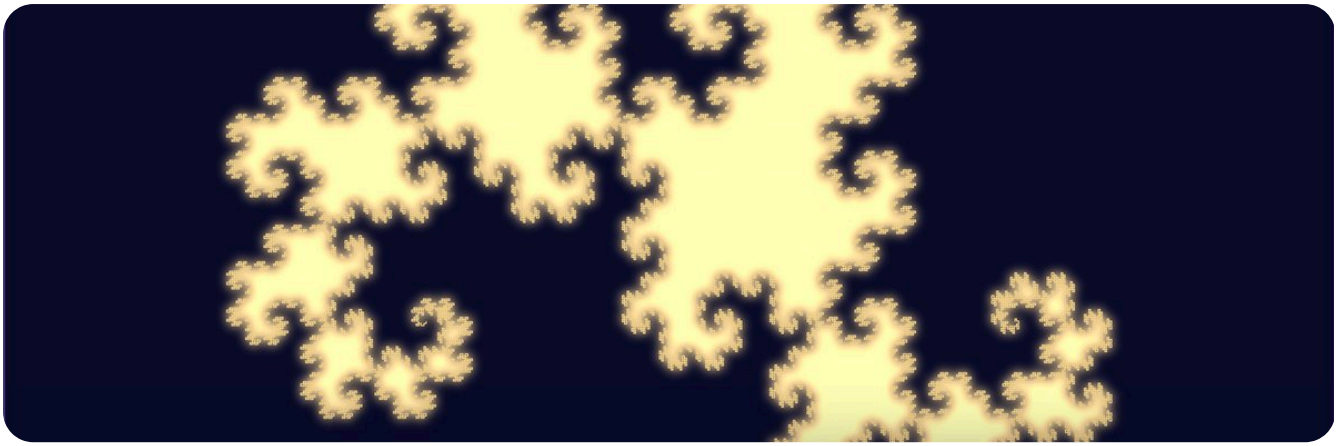
Что такое фрактал на самом деле

Обычная геометрия описывает фигуры, которые при ближайшем рассмотрении становятся проще. Увеличь любой маленький кусочек окружности — и он будет выглядеть как прямая; увеличь сферу — и она будет похожа на плоскость. На этом факте построен математический анализ: если приблизиться достаточно сильно, всё гладкое становится линейным.

Фрактал — это фигура, с которой такого не происходит никогда. Как бы сильно ты её ни увеличивал, появляются всё новые детали, и эти детали в целом того же рода, что и прежде. Обычно сходятся три признака:

1. **Детали на любом масштабе.** Не существует такого увеличения, при котором фигура становится гладкой.
2. **Та или иная форма самоподобия.** Малые части похожи на целое — точно (кривая Коха), приблизительно (множество Мандельброта) или лишь статистически (береговая линия).
3. **Дробная размерность.** Простое число, обычно лежащее между привычными целыми, показывает, насколько полно фигура заполняет пространство.

Есть и четвёртый, практический признак, который объясняет, почему фракталы так важны: обычно их порождает *очень короткое правило, применяемое снова и снова*. Это идея *итерации*, и на ней построены все восемь примеров ниже.



Пример 1 · Множество Кантора шаг за шагом

Возьми отрезок от 0 до 1. Удали открытую среднюю треть — останутся [0, 1/3] и [2/3, 1]. Из каждого оставшегося куска снова удали среднюю треть и повторяй до бесконечности.

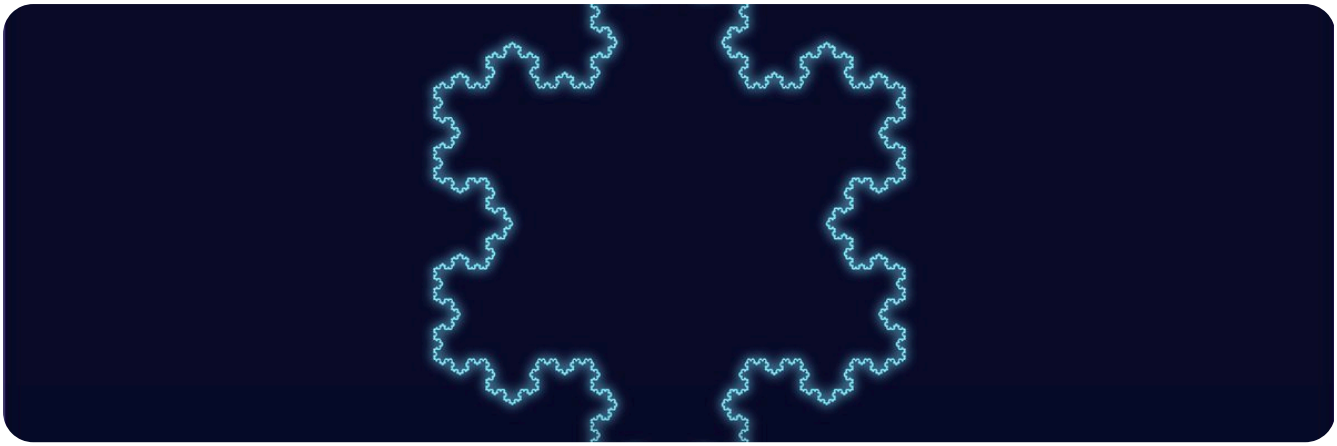
Шаг n	**Кусков 2^n**	**Длина каждого 3^{-n}**	**Общая длина $(2/3)^n$**
0	1	1	1
1	2	0.3333	0.6667
2	4	0.1111	0.4444
3	8	0.0370	0.2963
4	16	0.0123	0.1975
5	32	0.0041	0.1317

Общая длина на каждом шаге умножается на 2/3 и стремится к нулю. И всё же остаётся нечто бесконечное. Запиши числа в троичной системе: удаляя среднюю треть, мы удаляем числа, у которых первая троичная цифра обязательно равна 1. Остаются ровно те числа, которые можно записать только цифрами 0 и 2.

ПРОВЕРКА НА ПРИМЕРЕ

Принадлежит ли 1/4 множеству Кантора? В троичной системе $1/4 = 0.020202\ldots_3$ (потому что $0.0202\ldots_3 = 2/9 + 2/81 + \ldots = (2/9)/(1 - 1/9) = 1/4$). Здесь только нули и двойки, так что да. Это число принадлежит множеству, хотя никогда не бывает концом ни одного удалённого интервала.

Поскольку каждая бесконечная последовательность нулей и двоек задаёт свою точку, во множестве Кантора столько же точек, сколько во всём отрезке. Множество может иметь нулевую длину и при этом быть несчётным. Его размерность, которую мы вычислим в примере 3, примерно равна 0.6309: больше, чем у россыпи точек, но меньше, чем у линии.



Пример 2 · Снежинка Коха в числах

Возьми равносторонний треугольник со стороной 1. На средней трети каждой стороны построй равносторонний треугольник, направленный наружу, а затем сотри его основание. Каждая сторона превращается в четыре стороны, каждая втрое короче. Повтори.

Шаг n	Сторон $3 \cdot 4^n$	Периметр $3 \cdot (4/3)^n$	Площадь (исходная = 1)
0	3	3.000	1.0000
1	12	4.000	1.3333
2	48	5.333	1.4815
3	192	7.111	1.5473
4	768	9.481	1.5766
∞	∞	∞	1.6000

Почему площадь сходится. На шаге 1 мы добавляем 3 треугольника, каждый площадью 1/9 от исходной: +3/9. На шаге 2 добавляем 12 треугольников площадью 1/81: +12/81 = +(3/9)·(4/9). Каждый шаг добавляет 4/9 от того, что добавил предыдущий. Вся добавленная площадь — это геометрическая прогрессия:

```
3/9 · (1 + 4/9 + (4/9)² + …) = (1/3) · 1/(1 - 4/9) = 3/5
```

Значит, площадь готовой снежинки равна 1 + 3/5 = 8/5 площади исходного треугольника, а её периметр, умножаясь на каждом шаге на 4/3, растёт неограниченно. Конечная площадь заключена в бесконечно длинную границу. Посмотреть, как это происходит, можно с помощью ползунка на странице «Самоподобие».



Пример 3 · Размерность, измеренная тремя способами

Способ 1: подсчёт самоподобных копий

Разрежь отрезок пополам: 2 копии в масштабе 1/2. Разрежь квадрат на сетку 2×2: 4 копии. Куб — 8 копий. Во всех случаях $N = (1/s)^D$, где N — число копий, s — коэффициент масштаба, а D — размерность. Выразим D:

```
D = log N / log(1/s)
```

Фигура	**N**	**1/s**	**D = log N / log(1/s)**
Множество Кантора	2	3	log 2 / log 3 = 0.6309
Кривая Коха	4	3	log 4 / log 3 = 1.2619
Треугольник Серпинского	3	2	log 3 / log 2 = 1.5850
Ковёр Серпинского	8	3	log 8 / log 3 = 1.8928
Губка Менгера	20	3	log 20 / log 3 = 2.7268

Способ 2: подсчёт клеток

Накрой фигуру сеткой из клеток со стороной ε и посчитай, сколько клеток $N(\varepsilon)$ её касаются. Для треугольника Серпинского, нарисованного в единичном квадрате:

Размер клетки ε	**Клеток N(ε)**	**log N / log(1/ε)**
1/2	3	1.585
1/4	9	1.585
1/8	27	1.585
1/16	81	1.585

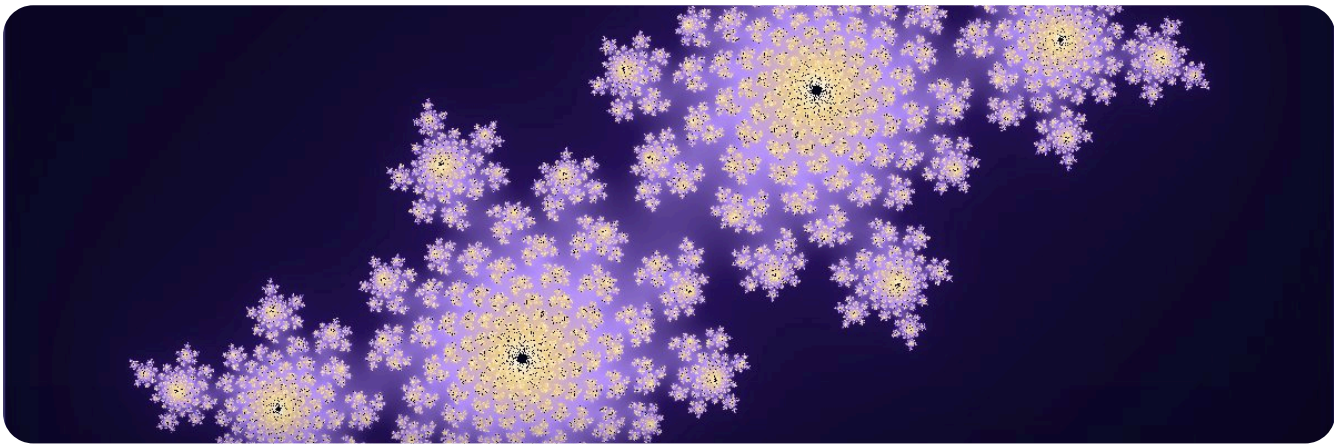
Каждое уменьшение размера клетки вдвое утраивает их число, поэтому наклон графика log N от log(1/ε) равен log 3 / log 2 — тот же ответ, что и при способе 1. Для реального объекта числа не такие аккуратные: точки наносят на график и проводят прямую через средний диапазон масштабов.

Способ 3: метод линейки (Ричардсон)

Пройдись циркулем-измерителем вдоль береговой линии. При большом растворе ты пропускаешь мелкие заливы, при маленьком — огибаешь их, поэтому измеренная длина L растёт по мере уменьшения шага линейки ε: $L(\varepsilon) \approx F \cdot \varepsilon^{1-D}$.

ПРИМЕР РАСЧЁТА (УСЛОВНЫЕ ЧИСЛА)

Допустим, линейка в 100 км даёт длину 2800 км, а линейка в 10 км — 5000 км. Линейка уменьшилась в 10 раз, а длина выросла в 5000/2800 = 1.786 раза. Тогда 1 − D = −log(1.786)/log(10) = −0.252, то есть D ≈ 1.25 — именно это значение Мандельброт приводил для западного побережья Великобритании.



Пример 4 · Итерируем $z^2 + c$ вручную

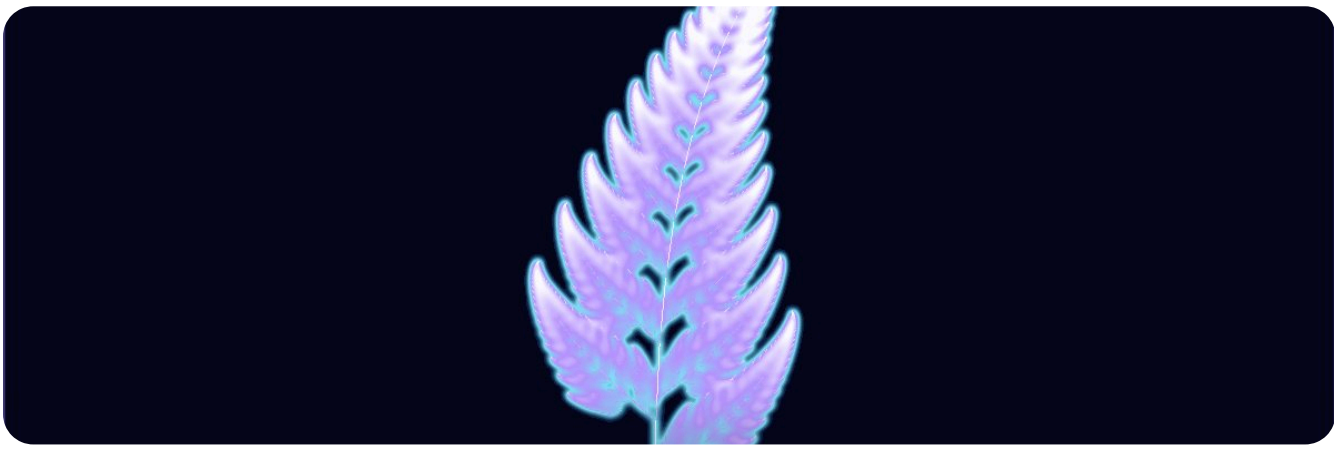
Множество Мандельброта — это множество таких чисел c, для которых последовательность 0, c, $c^2 + c$, … остаётся ограниченной. Проверять точки можно с помощью одной лишь арифметики.

c	Орбита нуля	Вердикт
−1	0, −1, 0, −1, 0, …	Цикл периода 2: **внутри**
1	0, 1, 2, 5, 26, 677, …	Улетает в бесконечность: **снаружи**
−2	0, −2, 2, 2, 2, …	Застревает на 2: **внутри** (левый кончик)
i	0, i, −1 + i, −i, −1 + i, −i, …	Попадает в 2-цикл: **внутри**, на границе
0.25	0, 0.25, 0.3125, 0.3477, … → 0.5	Медленно ползёт к 0.5: **внутри** (точка возврата)
0.3	0, 0.3, 0.39, 0.4521, 0.5044, … 1.0373, 1.3760, 2.1933	Превышает 2 на шаге 12: **снаружи**

КАК ВОЗВЕСТИ КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО В КВАДРАТ

$(-1 + i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$. Прибавив $c = i$, получаем $-i$. Затем $(-i)^2 = -1$, и прибавив i, снова получаем $-1 + i$. Орбита попала в петлю, значит, i принадлежит множеству.

Последняя строка показывает, почему вблизи границы для картинок нужно много итераций: $c = 0.3$ лежит снаружи, но совсем чуть-чуть, поэтому, чтобы это выяснить, нужно двенадцать шагов. Точкам, расположенным ближе к границе, нужны сотни или миллионы. Как только $|z|$ превысит 2, орбита гарантированно уйдёт в бесконечность — это правило остановки используется в любой программе для множества Мандельброта. Попробуй эти значения на странице «Множества Жюлиа»: $c = -1$ даёт «базилику», $c = i$ — дендрит.



Пример 5 · Строим папоротник по четырём правилам

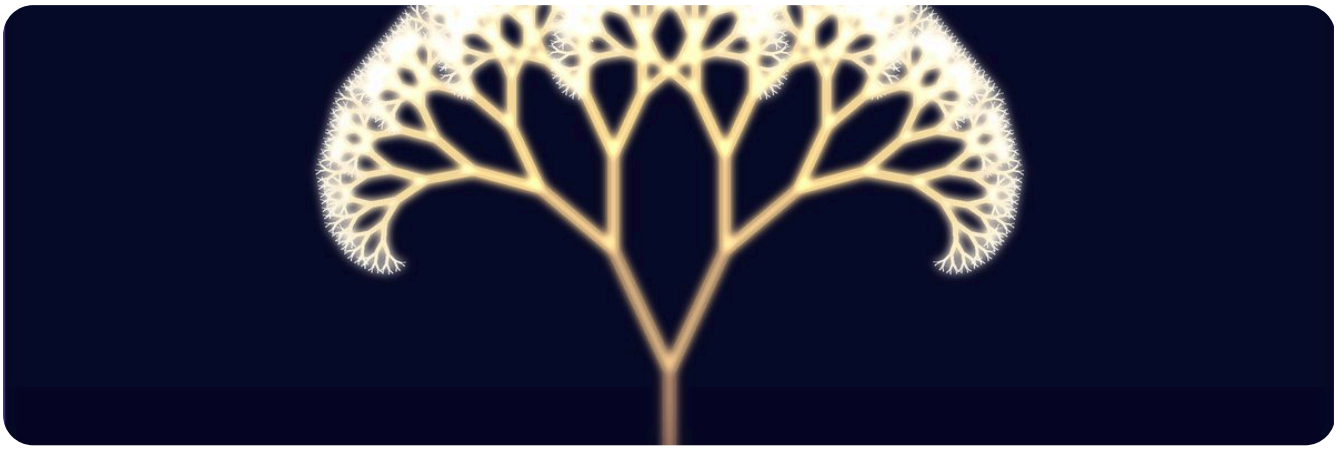
Система итерированных функций — это короткий список отображений, каждое из которых сжимает плоскость. Папоротник Майкла Барнсли использует четыре аффинных отображения вида $(x, y) \to (a \cdot x + b \cdot y + e, c \cdot x + d \cdot y + f)$:

Отображение	a	b	c	d	e	f	Вероятность	Рисует
1	0	0	0	0.16	0	0	1%	стебель
2	0.85	0.04	−0.04	0.85	0	1.6	85%	всё меньшие копии вверх по листу
3	0.20	−0.26	0.23	0.22	0	1.6	7%	левый листочек
4	−0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	7%	правый листочек

ТРИ ШАГА ВРУЧНУЮ

Начни с $(0, 0)$. Выпало отображение 2: $(0.85 \cdot 0 + 0.04 \cdot 0, -0.04 \cdot 0 + 0.85 \cdot 0 + 1.6) = (0, 1.6)$. Снова отображение 2: $(0.04 \cdot 1.6, 0.85 \cdot 1.6 + 1.6) = (0.064, 2.96)$. Отображение 3: $(0.2 \cdot 0.064 - 0.26 \cdot 2.96, 0.23 \cdot 0.064 + 0.22 \cdot 2.96 + 1.6) = (-0.757, 2.266)$. Каждую точку отмечаем на рисунке; после десятков тысяч точек проявляется папоротник.

Двадцать четыре числа описывают папоротник, для которого иначе понадобились бы миллионы пикселей. На этой идее основаны игра «Хаос» и фрактальное сжатие изображений.

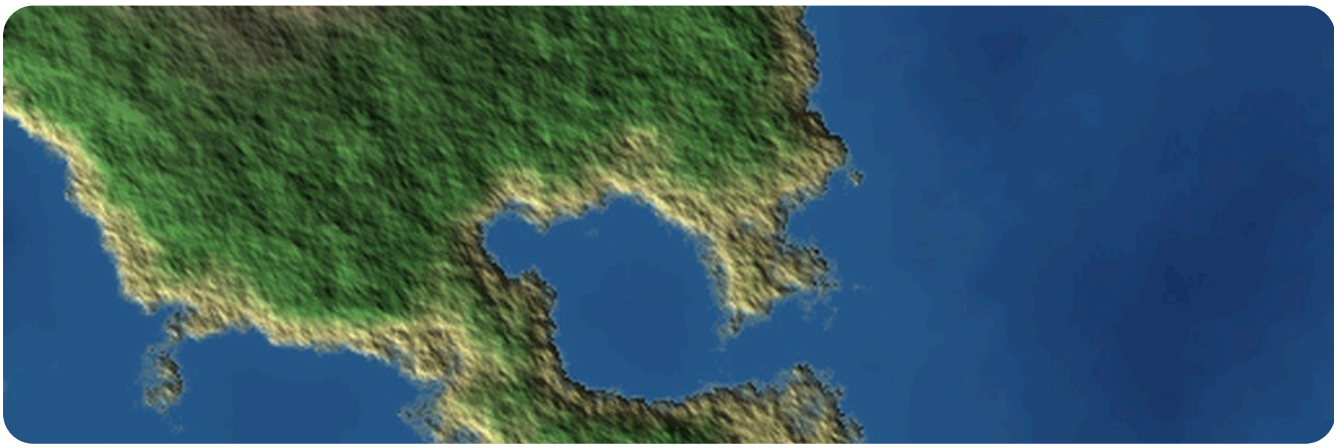


Пример 6 · Выращиваем кривую из строки

L-система переписывает все символы строки одновременно. Для кривой Коха: начинаем с `F`; правило — `F → F+F--F+F`; `F` означает «рисовать вперёд», `+` и `-` — «повернуть на 60°».

Шаг	Строка	Символов F
0	`F`	1
1	`F+F--F+F`	4
2	`F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F`	16

Число отрезков на каждом шаге умножается на 4, а каждый отрезок рисуется втрое короче, поэтому рисунок сохраняет размер и обрастает знакомыми выступами Коха. Если добавить скобки, которые сохраняют и восстанавливают положение пера, та же идея превращается в ветвящиеся растения; см. страницу «Фрактальные деревья».

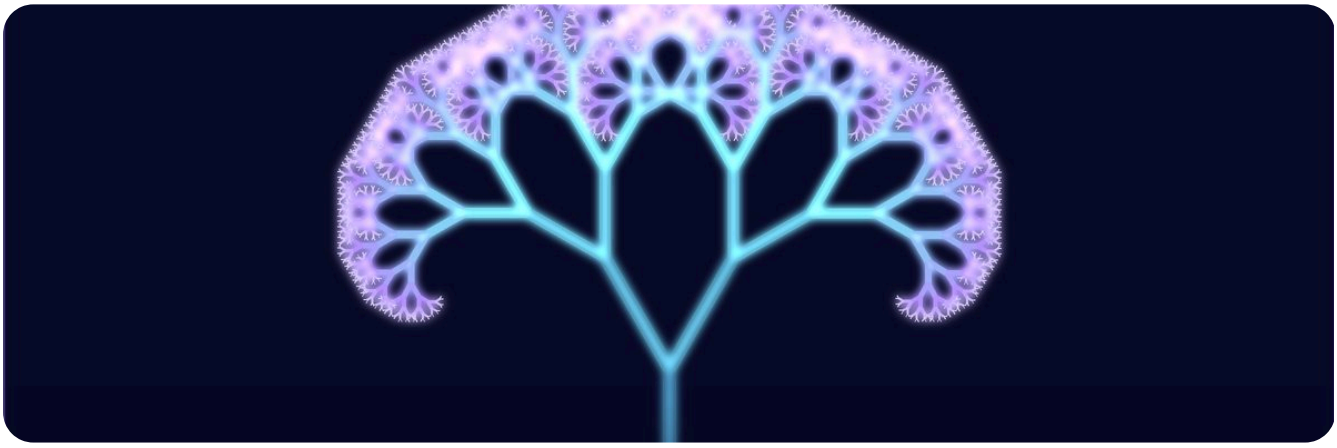


Пример 7 · Случайная гора вручную

Природные фракталы шероховаты в статистическом смысле. Метод *смещения средней точки* создаёт такую шероховатость с помощью монетки и линейки.

1. Нарисуй горизонтальный отрезок, оба конца которого находятся на высоте 0.
2. Сдвинь его середину вверх или вниз на случайную величину от −1 до +1. Допустим, кубик дал +0.6.
3. Теперь отрезков два. Сдвинь середину каждого из них на случайную величину, но вдвое меньшую: от −0.5 до +0.5. Допустим, −0.2 и +0.3; тогда высоты в точках четвертей станут 0.3 − 0.2 = 0.1 и 0.3 + 0.3 = 0.6.
4. Повторяй, каждый раз уменьшая диапазон случайных сдвигов вдвое.

После восьми–десяти раундов получится убедительный горный хребет. Скорость уменьшения случайных сдвигов управляет шероховатостью: если каждый раунд уменьшать их в 2^H раз, профиль будет иметь размерность $D = 2 - H$. Чем меньше H, тем более изрезан хребет. Миниатюра «Случайные фракталы» на странице «Виды фракталов» нарисована именно так.



Пример 8 · Измеряем реальный объект

Фрактальную размерность реальной фигуры — например, контура листа, трещины или береговой линии на карте — можно оценить дома:

1. Сфотографируй или отсканируй фигуру в высоком контрасте, чтобы контур был тонкой тёмной линией.
2. Наложи сетки с размером клетки, скажем, 64, 32, 16, 8 и 4 пикселя и посчитай клетки, в которые попадает часть линии.
3. Построй график log(число клеток) от log(1/размер клетки). Не учитывай самые крупные клетки (задеты все) и самые мелкие (ты считаешь уже пиксели, а не объект).
4. Наклон прямой, проведённой через средние точки, и есть клеточная размерность.

ТИПИЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Гладкая окружность даёт около 1.0. Карта береговой линии часто даёт значения от 1.1 до 1.3. Силуэт дерева или фотография молнии могут дать от 1.5 до 1.8. Два разных фотографа получат немного разные значения: метод даёт оценку, и ответ зависит от того, какому диапазону масштабов ты доверяешь.

Шесть распространённых заблуждений

1. **«Фракталы обязаны быть точно самоподобными».** Большинство природных фракталов, да и само множество Мандельброта, такими не являются. Достаточно статистического или приблизительного подобия.
2. **«Любая сложная картинка — фрактал».** Дело не в сложности, а в согласованной детализации на разных масштабах. У случайной россыпи точек нет закона масштабирования.
3. **«Природные фракталы продолжаются бесконечно».** Реальные фракталы существуют лишь в определённом диапазоне масштабов — у береговой линии от миллиметров до километров. Ниже вступает в свои права физика.
4. **«Фрактальная размерность всегда дробная».** У границы множества Мандельброта и у кривой Гильберта размерность ровно 2. Важно то, что она превышает топологическую размерность.
5. **«Фракталы — это просто красивые картинки».** Их применяют при проектировании антенн, в медицинской визуализации, материаловедении, финансах и компьютерной графике; см. раздел «Применения».
6. **«Фракталы изобрёл Мандельброт».** Он дал им название и объединил их в 1975 году, но Кантор, Кох, Серпинский, Хаусдорф, Безикович, Жюлиа и Фату изучали эти объекты на десятилетия раньше; см. «Биографии».

Сводная таблица

Пример	Правило	Ключевое число	Вывод
Множество Кантора	Удалять средние трети	$D \approx 0.631$	Нулевая длина, несчётно много точек
Снежинка Коха	Выступ на каждой средней трети	Площадь 8/5, периметр ∞	Конечная площадь, бесконечный край
Треугольник Серпинского	Оставлять 3 из 4 треугольников половинного размера	$D \approx 1.585$	Три метода измерения размерности совпадают
Множество Мандельброта	$z \to z^2 + c$, начиная с $z = 0$	Радиус ухода 2	Ограниченные орбиты рисуют множество
Папоротник Барнсли	4 аффинных отображения, выбираемых случайно	24 числа	Короткие правила, богатые формы
Гора из средних точек	Случайные сдвиги, вдвое меньшие каждый раунд	$D = 2 - H$	Статистическое самоподобие

Готов идти дальше? Бесплатный курс из 21 урока превращает эти примеры в последовательный путь с тестами и сертификатом.

Проверь себя

Здесь по одному вопросу к каждому уроку бесплатного курса, всего 21. Попробуй ответить, не заглядывая назад; ответы — в конце пособия.

1. Кто придумал слово «фрактал» и когда?

A. Хельге фон Кох, 1904
B. Феликс Хаусдорф, 1918
C. Бенуа Мандельброт, 1975
D. Гастон Жюлиа, 1918

2. Какое самоподобие у снежинки Коха?

A. Точное
B. Квазисамоподобие
C. Статистическое
D. Никакого

3. Какая общая длина остаётся у множества Кантора?

A. 1/3
B. 2/3
C. 0
D. 1/2

4. Сколько отрезков у кривой Коха после одного шага?

A. 2
B. 3
C. 4
D. 6

5. Какая доля площади остаётся после n шагов построения треугольника Серпинского?

A. $(1/2)^n$
B. $(2/3)^n$
C. $(3/4)^n$
D. $(1/3)^n$

6. Кто опубликовал первую кривую, заполняющую пространство?

A. Гильберт, 1891
B. Пеано, 1890
C. Кантор, 1883
D. Кох, 1904

7. Что происходит с измеренной длиной береговой линии, когда линейка становится короче?

A. Она уменьшается
B. Она не меняется
C. Она увеличивается
D. Она становится равной нулю

8. Фигура состоит из 9 копий самой себя, каждая уменьшена с коэффициентом 1/3. Какова её размерность подобия?

A. 1
B. 1.5
C. 2
D. 3

9. При уменьшении клетки вдвое число клеток утраивается. Какова клеточная размерность?

A. 1.5
B. $\log 3 / \log 2 \approx 1.585$
C. 3
D. 2/3

10. Если s меньше размерности Хаусдорфа множества, то мера H^s…

A. равна 0
B. бесконечна
C. равна 1
D. отрицательна

11. Какая теорема гарантирует, что у СИФ есть единственный аттрактор?

A. Теорема Пифагора
B. Теорема Банаха о неподвижной точке
C. Великая теорема Ферма
D. Теорема о промежуточном значении

12. Насколько далеко прыгает точка к выбранной вершине в игре «Хаос» для треугольника Серпинского?

A. На четверть пути
B. На полпути
C. На две трети пути
D. До самой вершины

13. Как переписываются символы в L-системе?

A. По одному, слева направо
B. Все сразу, параллельно
C. Только последний символ
D. В случайном порядке

14. Показатель Хёрста дробного броуновского следа равен $H = 0.7$. Какова размерность его графика?

A. 0.7
B. 1.3
C. 1.7
D. 2.7

15. Чему равно $(1 + i)^2$?

A. 2
B. 2i
C. 1 + 2i
D. 0

16. Что представляет собой множество Жюлиа при $c = 0$?

A. Одну точку
B. Единичную окружность
C. Канторову пыль
D. Базилику

17. Принадлежит ли $c = -1$ множеству Мандельброта?

A. Да: орбита 0 — это 0, −1, 0, −1, …
B. Нет: орбита убегает
C. Только на границе
D. На этот вопрос нет ответа

18. В каком году Лоренц опубликовал свой аттрактор?

A. 1918
B. 1963
C. 1976
D. 1980

19. Какая обобщённая размерность равна клеточной размерности?

A. D_0
B. D_1
C. D_2
D. D_∞

20. Почему природные фракталы самоподобны лишь в ограниченном диапазоне масштабов?

A. Из-за ошибок измерения
B. На очень больших и очень малых масштабах меняются физические процессы
C. Это не настоящие фракталы
D. Из-за уравнения Морана

21. Каково главное преимущество фрактальной антенны?

A. Её дешевле красить
B. Она компактна и хорошо работает на нескольких частотах
C. Ей не нужно питание
D. Она невидима для радаров

Ответы

1. **C** — Мандельброт ввёл это слово в 1975 году в книге *Les objets fractals*.
2. **A** — Кривая Коха состоит из четырёх точных копий самой себя, уменьшенных в 3 раза (с коэффициентом 1/3).
3. **C** — После n шагов длина равна $(2/3)^n$, а это стремится к 0.
4. **C** — Средняя треть заменяется двумя отрезками, и получается 4 отрезка длиной 1/3.
5. **C** — Каждый шаг сохраняет 3 из 4 малых треугольников.
6. **B** — Кривая Пеано 1890 года была первой; более простой вариант Гильберта появился в 1891 году.
7. **C** — Более короткая линейка обходит более мелкие заливы и мысы, поэтому общая длина растёт.
8. **C** — $\log 9 / \log 3 = 2$. Именно так ведёт себя квадрат, разбитый сеткой 3×3.
9. **B** — Из $N(\varepsilon/2) = 3N(\varepsilon)$ следует $D = \log 3 / \log 2$.
10. **B** — Ниже критического значения H^s бесконечна, выше — равна 0.
11. **B** — Оператор Хатчинсона — сжимающее отображение, поэтому теорема Банаха о неподвижной точке даёт единственное неподвижное множество.
12. **B** — Коэффициент прыжка 1/2 совпадает с коэффициентом сжатия трёх отображений.
13. **B** — Именно параллельная подстановка отличает L-системы от обычных грамматик.
14. **B** — $D = 2 - H = 1.3$.
15. **B** — $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$.
16. **B** — Для $z \to z^2$ точки на единичной окружности остаются на ней; точки внутри стремятся к 0, снаружи — к бесконечности.
17. **A** — Орбита чередует 0 и −1, поэтому остаётся ограниченной.
18. **B** — Лоренц опубликовал статью «Deterministic Nonperiodic Flow» в 1963 году.
19. **A** — D_0 считает клетки, не взвешивая их по массе.
20. **B** — За пределами диапазона скейлинга действует другая физика — например, у береговой линии внизу шкалы оказываются песчинки.
21. **B** — Изогнутый фрактальный контур обеспечивает многодиапазонную работу при малом размере.

Продолжай онлайн

На forefractal.com ты можешь пройти бесплатный курс фрактальной геометрии из 21 урока с короткими тестами и сертификатом в конце. В каждом уроке есть живые рисунки, которые можно увеличивать, менять и исследовать.

Ещё на сайте есть интерактивные исследователи множеств Мандельброта и Жюлиа, игры «Хаос» и фрактальных деревьев, статьи о фракталах в природе, науке и искусстве, а также презентации для уроков для учителей. Всё бесплатно и доступно на семи языках.

© 2026 Fractalist · ForeFractal.com · можно свободно печатать и распространять для некоммерческого обучения