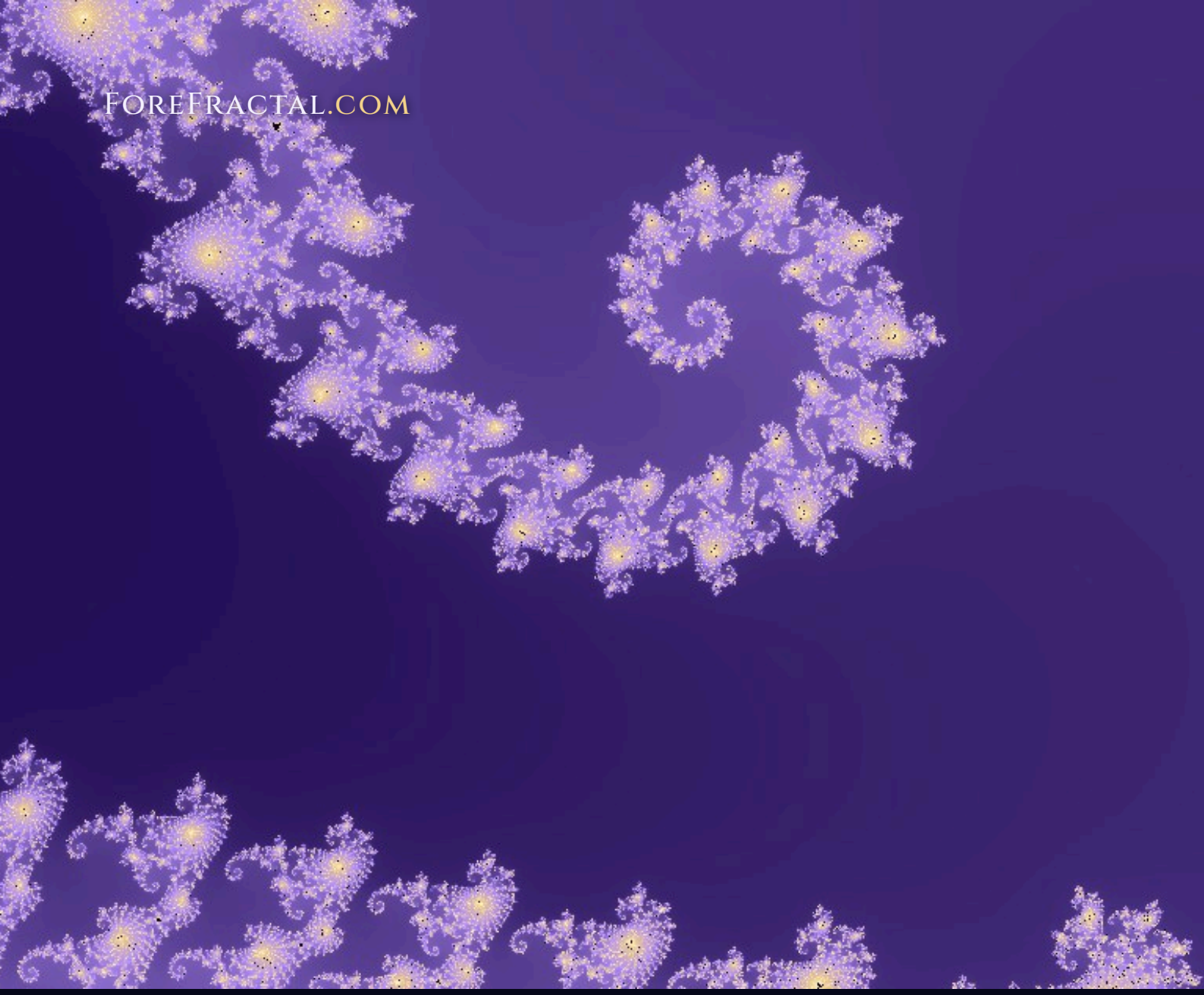


Безкоштовний посібник про *фрактали*

Самоподібність, розмірність і множина Мандельброта крок за кроком

Fractalist · ForeFractal.com

Як користуватися посібником

Цей посібник знайомить із фракталами — формами, що мають деталі на будь-якому масштабі, від берегових ліній і папоротей до множини Мандельброта. Він охоплює той самий матеріал, що й безкоштовний онлайн-курс: читай його від початку до кінця або одразу переходь до потрібного розділу.

Знадобиться лише шкільна алгебра. Там, де з'являються логарифми чи комплексні числа, посібник одразу пояснює все необхідне. Розв'язані приклади показують кожен крок обчислення; спершу спробуй розв'язати кожен сам, а потім читай розв'язання.

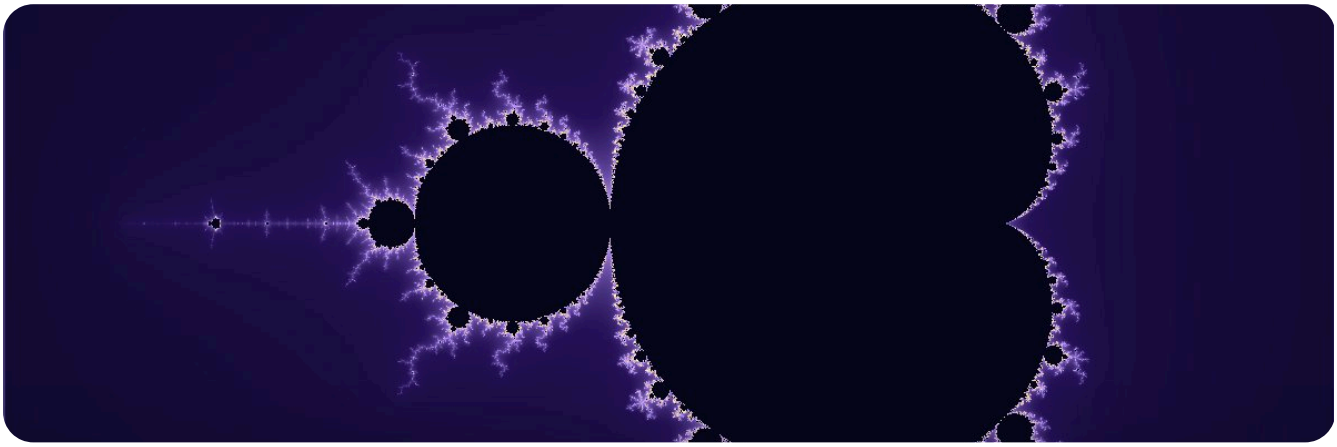
Наприкінці ти знайдеш по одному тестовому запитанню до кожного уроку курсу, а відповіді — на окремій сторінці. Учителі можуть вільно друкувати посібник і використовувати його як роздатковий матеріал, для домашніх завдань чи повторення.

Зміст

1. Що таке фрактал насправді
2. Приклад 1 · Множина Кантора крок за кроком
3. Приклад 2 · Сніжинка Коха в числах
4. Приклад 3 · Розмірність, виміряна трьома способами
5. Приклад 4 · Ітеруємо $z^2 + c$ вручну
6. Приклад 5 · Папороть із чотирьох правил
7. Приклад 6 · Вирощуємо криву з рядка символів
8. Приклад 7 · Випадкова гора вручну
9. Приклад 8 · Вимірюємо реальний об'єкт
10. Шість поширених хибних уявлень
11. Підсумкова таблиця
12. Перевір себе
13. Відповіді
14. Продовжуй онлайн

Фрактали докладно, з розв'язаними прикладами

Це розширена версія. Замість самих лише картинок кожну ідею тут розібрано на конкретних числах, які ти можеш перевірити на папері чи калькуляторі. Читай усе підряд або одразу переходь до потрібного прикладу.



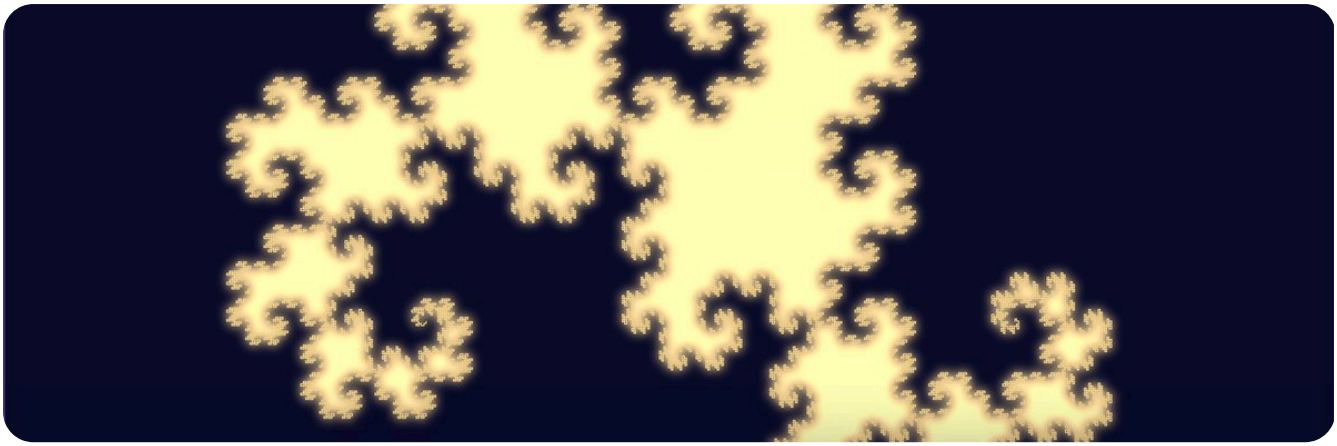
Що таке фрактал насправді

Звичайна геометрія описує фігури, які стають простішими, коли придивляєшся до них ближче. Збільш будь-який маленький шматочок кола — і він виглядатиме як пряма; збільш сферу — і вона виглядатиме як плоска площина. На цьому факті збудовано математичний аналіз: якщо наблизитися достатньо, усе гладке стає лінійним.

Фрактал — це фігура, з якою такого не стається ніколи. Хоч як сильно її збільшуєш, з'являються нові деталі, і ці деталі за своїм характером подібні до попередніх. Зазвичай поєднуються три складники:

1. **Деталі на кожному масштабі.** Немає такого збільшення, за якого фігура стала б гладкою.
2. **Певна самоподібність.** Малі частини нагадують ціле — точно (крива Коха), наближено (множина Мандельброта) або лише статистично (берегова лінія).
3. **Дробова розмірність.** Одне число, зазвичай між звичними цілими, показує, наскільки повно фігура заповнює простір.

Є й четвертий, практичний складник, який пояснює, чому фрактали такі важливі: зазвичай їх породжує *дуже коротке правило*, *застосоване знову* і *знову*. Це ідея *ітерації*, і на ній побудовано всі вісім прикладів нижче.



Приклад 1 · Множина Кантора крок за кроком

Почнімо з відрізка від 0 до 1. Викинемо відкриту середню третину, залишивши [0, 1/3] і [2/3, 1]. З кожного шматка, що залишився, знову викинемо середню третину — і так без кінця.

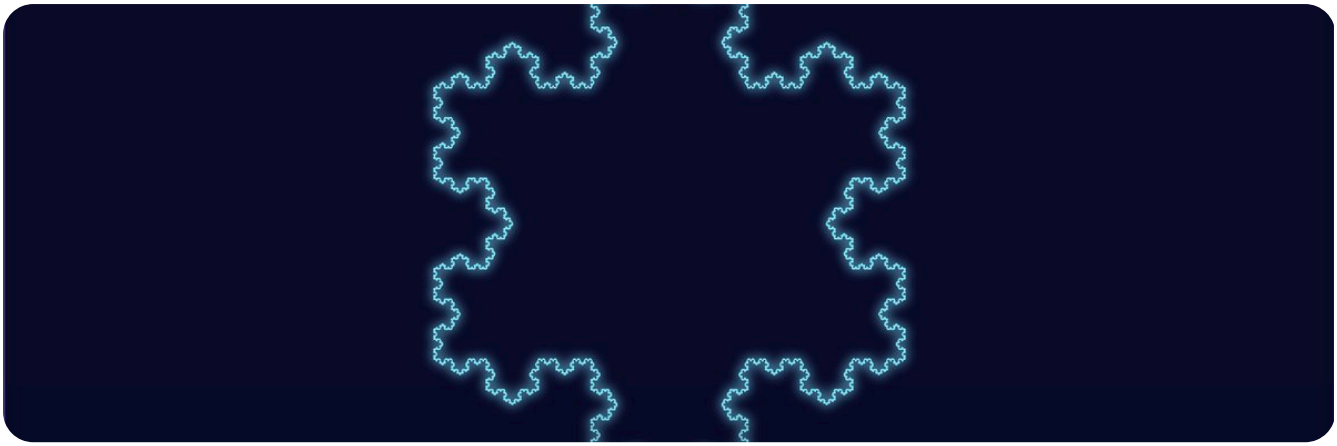
Крок n	**Шматків 2^n**	**Довжина кожного 3^{-n}**	**Загальна довжина $(2/3)^n$**
0	1	1	1
1	2	0.3333	0.6667
2	4	0.1111	0.4444
3	8	0.0370	0.2963
4	16	0.0123	0.1975
5	32	0.0041	0.1317

Загальна довжина на кожному кроці множиться на 2/3 і прямує до нуля. І все ж щось нескінченне вціліло. Запишімо числа в трійковій системі: викидаючи середню третину, ми прибираємо числа, перша трійкова цифра яких обов'язково дорівнює 1. Залишаються саме ті числа, які можна записати лише цифрами 0 і 2.

ПЕРЕВІРКА НА ПРИКЛАДІ

Чи належить 1/4 множині Кантора? У трійковій системі $1/4 = 0.020202..._3$ (бо $0.0202..._3 = 2/9 + 2/81 + \ldots = (2/9)/(1 - 1/9) = 1/4$). Тут є лише нулі та двійки, тож так. Це число належить множині, хоча ніколи не буває кінцем жодного з викинутих інтервалів.

Оскільки кожна нескінченна послідовність нулів і двійок дає іншу точку, у множині Кантора стільки ж точок, скільки на всьому відрізку. Множина може мати нульову довжину й водночас бути незліченною. Її розмірність, яку ми обчислимо в прикладі 3, становить приблизно 0.6309: більше, ніж у розсипу окремих точок, але менше, ніж у лінії.



Приклад 2 · Сніжинка Коха в числах

Почнімо з рівностороннього трикутника зі стороною 1. На середній третині кожної сторони побудуймо рівносторонній трикутник, спрямований назовні, а потім зітремо його основу. Кожна сторона перетворюється на чотири сторони, кожна втричі коротша. Повторюємо.

Крок n	**Сторін $3 \cdot 4^n$**	**Периметр $3 \cdot (4/3)^n$**	**Площа (початкова = 1)**
0	3	3.000	1.0000
1	12	4.000	1.3333
2	48	5.333	1.4815
3	192	7.111	1.5473
4	768	9.481	1.5766
∞	∞	∞	1.6000

Чому площа збігається. На кроці 1 ми додаємо 3 трикутники, кожен площею 1/9 від початкової: +3/9. На кроці 2 додаємо 12 трикутників площею 1/81: +12/81 = +(3/9)·(4/9). Кожен крок додає 4/9 від того, що додав попередній. Сумарний приріст — це геометрична прогресія:

```
3/9 · (1 + 4/9 + (4/9)² + …) = (1/3) · 1/(1 - 4/9) = 3/5
```

Отже, площа готової сніжинки дорівнює 1 + 3/5 = 8/5 площі початкового трикутника, тоді як її периметр, що на кожному кроці множиться на 4/3, зростає необмежено. Скінченну площу охоплює нескінченно довга межа. Побачити це на власні очі можна за допомогою повзунка на сторінці «Самоподібність».



Приклад 3 · Розмірність, виміряна трьома способами

Спосіб 1: рахуємо самоподібні копії

Розріж відрізок навпіл: 2 копії в масштабі 1/2. Розріж квадрат сіткою 2×2: 4 копії. Куб: 8 копій. У кожному випадку $N = (1/s)^D$, де N — кількість копій, s — коефіцієнт масштабу, а D — розмірність. Розв'язуємо щодо D:

```
D = log N / log(1/s)
```

Фігура	N	1/s	D = log N / log(1/s)
Множина Кантора	2	3	log 2 / log 3 = 0.6309
Крива Коха	4	3	log 4 / log 3 = 1.2619
Трикутник Серпінського	3	2	log 3 / log 2 = 1.5850
Килим Серпінського	8	3	log 8 / log 3 = 1.8928
Губка Менгера	20	3	log 20 / log 3 = 2.7268

Спосіб 2: підрахунок клітинок (box counting)

Накрий фігуру сіткою квадратних клітинок зі стороною ε і порахуй, скільки клітинок $N(\varepsilon)$ її торкаються. Для трикутника Серпінського, накресленого в одиничному квадраті:

Розмір клітинки ε	Клітинок N(ε)	log N / log(1/ε)
1/2	3	1.585
1/4	9	1.585
1/8	27	1.585
1/16	81	1.585

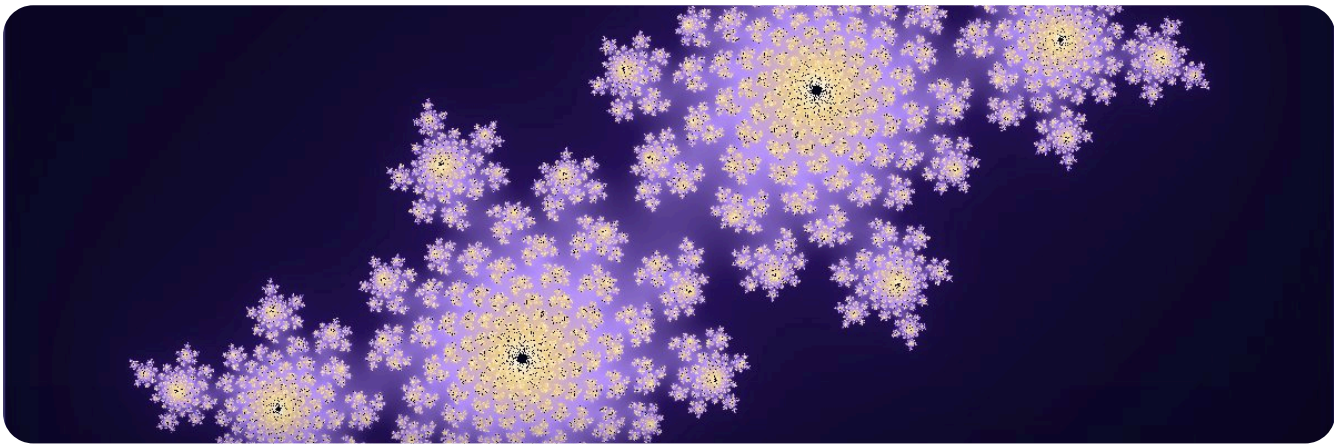
Кожне зменшення клітинки вдвічі потроює їхню кількість, тож нахил графіка log N від log(1/ε) дорівнює log 3 / log 2 — та сама відповідь, що й у способі 1. Для реального об'єкта числа не будуть такими акуратними: точки наносять на графік і проводять пряму через середній діапазон масштабів.

Спосіб 3: метод лінійки (Річардсон)

Пройдися циркулем-вимірником уздовж берегової лінії. З ширшим розхилом ти проскакуєш маленькі затоки, з вужчим — обходиш їх, тому виміряна довжина L зростає, коли «лінійка» ε зменшується: $L(\varepsilon) \approx F \cdot \varepsilon^{1-D}$.

РОЗВ'ЯЗАНИЙ ПРИКЛАД (УМОВНІ ЧИСЛА)

Припустімо, що лінійка завдовжки 100 км дає довжину 2800 км, а лінійка завдовжки 10 км — 5000 км. Лінійка зменшилася в 10 разів, а довжина зросла в 5000/2800 = 1.786 раза. Тоді 1 − D = −log(1.786)/log(10) = −0.252, отже D ≈ 1.25 — саме це значення Мандельброт навів для західного узбережжя Великої Британії.



Приклад 4 · Ітеруємо $z^2 + c$ вручну

Множина Мандельброта — це множина чисел c, для яких послідовність 0, c, $c^2 + c$, … залишається обмеженою. Перевіряти точки можна, маючи лише арифметику.

c	Орбіта точки 0	Висновок
−1	0, −1, 0, −1, 0, …	Цикл із періодом 2: **усередині**
1	0, 1, 2, 5, 26, 677, …	Вибухає: **ззовні**
−2	0, −2, 2, 2, 2, …	Застрягає на 2: **усередині** (лівий кінчик)
i	0, i, −1 + i, −i, −1 + i, −i, …	Потрапляє у 2-цикл: **усередині**, на межі
0.25	0, 0.25, 0.3125, 0.3477, … → 0.5	Повільно підповзає до 0.5: **усередині** (точка повернення)
0.3	0, 0.3, 0.39, 0.4521, 0.5044, … 1.0373, 1.3760, 2.1933	Перевищує 2 на кроці 12: **ззовні**

ЯК ПІДНЕСТИ КОМПЛЕКСНЕ ЧИСЛО ДО КВАДРАТА

$(-1 + i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$. Додаючи c = i, отримуємо −i. Далі $(-i)^2 = -1$, і після додавання і знову маємо −1 + i. Орбіта потрапила в петлю, тож і належить множині.

Останній рядок показує, чому для зображень поблизу межі потрібно багато ітерацій: c = 0.3 лежить ззовні, але зовсім трохи, тому, щоб це виявити, потрібно дванадцять кроків. Точкам, ближчим до межі, потрібні сотні чи мільйони кроків. Щойно |z| перевищує 2, орбіта гарантовано тікає на нескінченність, — це правило зупинки використовує кожна програма для множини Мандельброта. Спробуй ці значення на сторінці «Множини Жюліа»: c = −1 дає «базиліку», c = i — дендрит.



Приклад 5 · Папороть із чотирьох правил

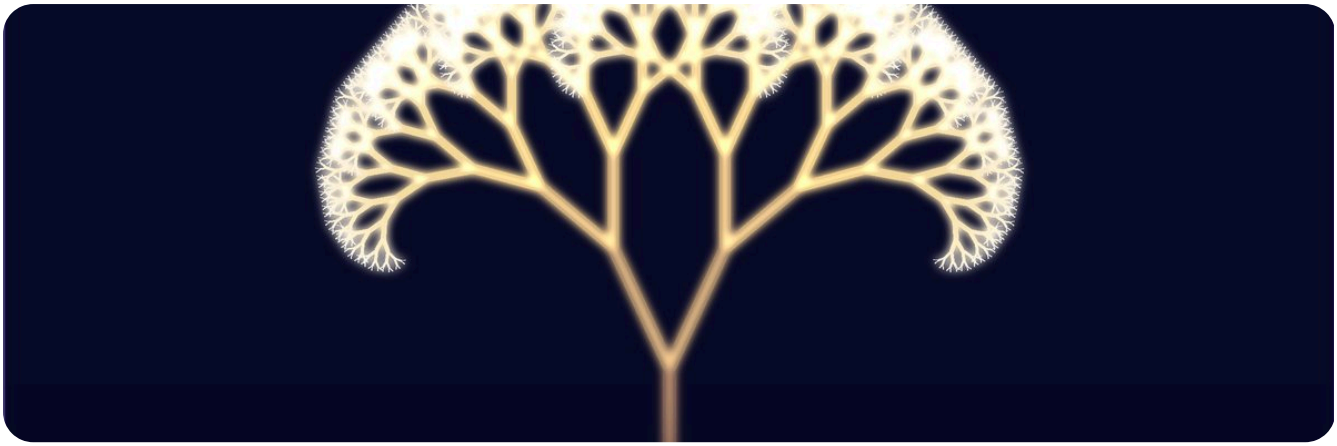
Система ітерованих функцій (СІФ) — це короткий список відображень, кожне з яких стискає площину. Папороть Майкла Барнслі використовує чотири афінні відображення вигляду (x, y) → (a·x + b·y + e, c·x + d·y + f):

Відображення	a	b	c	d	e	f	Імовірність	Що малює
1	0	0	0	0.16	0	0	1%	стебло
2	0.85	0.04	−0.04	0.85	0	1.6	85%	дедалі менші копії вгору по листку
3	0.20	−0.26	0.23	0.22	0	1.6	7%	лівий листочок
4	−0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	7%	правий листочок

ТРИ КРОКИ ВРУЧНУ

Починаємо з (0, 0). Випало відображення 2: (0.85·0 + 0.04·0, −0.04·0 + 0.85·0 + 1.6) = (0, 1.6). Знову відображення 2: (0.04·1.6, 0.85·1.6 + 1.6) = (0.064, 2.96). Відображення 3: (0.2·0.064 − 0.26·2.96, 0.23·0.064 + 0.22·2.96 + 1.6) = (−0.757, 2.266). Кожну точку наносимо на рисунок; після десятків тисяч точок з’являється папороть.

Двадцять чотири числа описують папороть, для якої інакше знадобилися б мільйони пікселів. На цій ідеї ґрунтуються гра хаосу і фрактальне стиснення зображень.

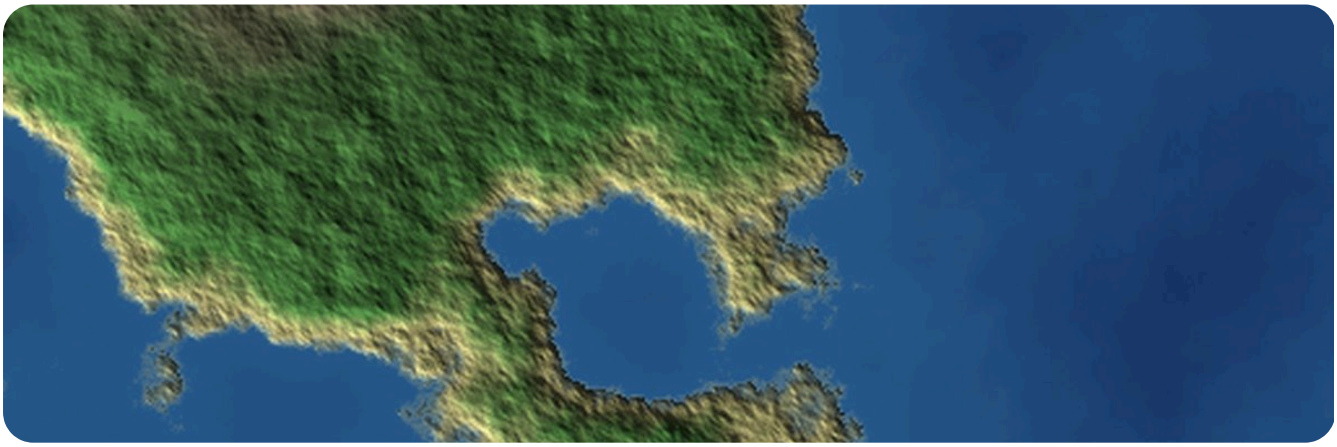


Приклад 6 · Вирощуємо криву з рядка символів

L-система переписує всі символи рядка одночасно. Для кривої Коха: починаємо з `F`; правило — `F → F+F--F+F`; `F` означає «малюй уперед», `+` і `-` — «повернись на 60°».

Крок	Рядок	Символів F
0	`F`	1
1	`F+F--F+F`	4
2	`F+F--F+F+F+F--F+F--F+F--F+F+F+F--F+F`	16

Кількість відрізків на кожному кроці множиться на 4, а кожен відрізок малюється втричі коротшим, тож рисунок зберігає розмір і обростає знайомими «горбиками» Коха. Якщо додати дужки, які запам’ятовують і відновлюють положення пера, та сама ідея перетворюється на розгалужені рослини; див. сторінку «Фрактальні дерева».



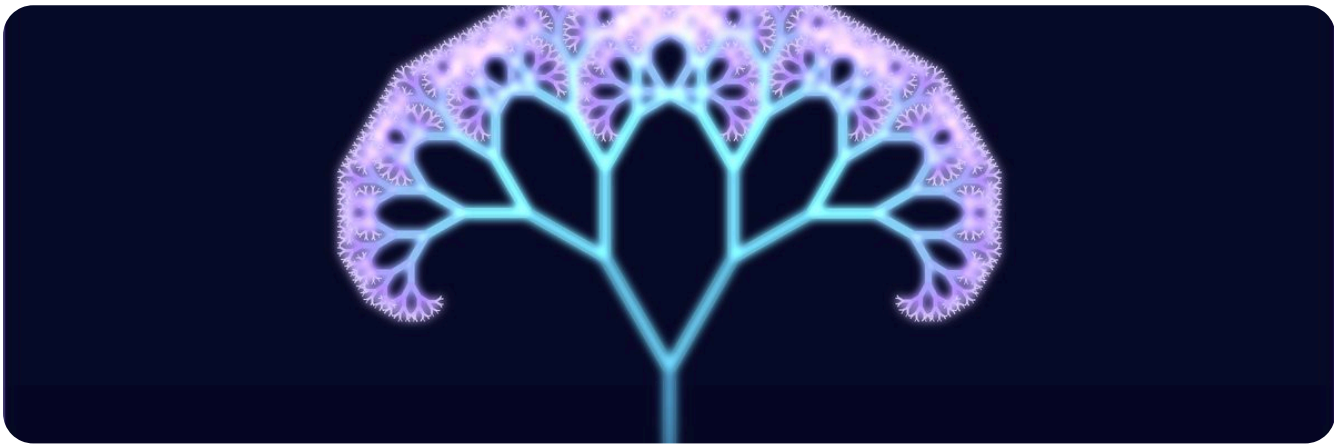
Приклад 7 · Випадкова гора вручну

Природні фрактали шорсткі в статистичному сенсі. Метод *зміщення середньої точки* дає таку шорсткість за допомогою монетки й лінійки.

1. Накресли горизонтальний відрізок, обидва кінці якого мають висоту 0.

2. Зсунь його середину вгору чи вниз на випадкову величину від −1 до +1. Скажімо, кубик дав +0.6.
3. Тепер відрізків два. Зсунь середину кожного з них на випадкову величину, але вдвічі меншу: від −0.5 до +0.5. Скажімо, −0.2 і +0.3, тож висоти в точках чвертей стають 0.3 − 0.2 = 0.1 і 0.3 + 0.3 = 0.6.
4. Повторюй, щоразу зменшуючи діапазон випадкових зсувів удвічі.

Після восьми–десяти раундів маєш переконливий гірський хребет. Те, як швидко зменшуються випадкові зсуви, визначає шорсткість: якщо щораунду зменшувати їх у 2^H раза, профіль матиме розмірність $D = 2 - H$. Що менше H, то шорсткіший хребет. Мініатюру «Випадкові фрактали» на сторінці «Типи фракталів» намальовано саме так.



Приклад 8 · Вимірюємо реальний об’єкт

Фрактальну розмірність реальної фігури — контуру листка, тріщини чи берегової лінії на мапі — можна оцінити вдома:

1. Сфотографуй або відскануй фігуру з високою контрастністю, щоб контур був тонкою темною лінією.
2. Наклади сітки з розміром клітинки, скажімо, 64, 32, 16, 8 і 4 пікселі та порахуй клітинки, у які потрапляє частина лінії.
3. Побудуй графік log(кількість) від log(1/розмір клітинки). Не зважай на найбільші клітинки (зачеплено все) і на найменші (ти рахуєш пікселі, а не об’єкт).
4. Нахил прямої, проведеної через середні точки, і є розмірністю Мінковського (box-counting).

ТИПОВІ РЕЗУЛЬТАТИ

Гладке коло дає близько 1.0. Мапа берегової лінії часто дає значення від 1.1 до 1.3. Силует дерева чи фотографія блискавки можуть дати від 1.5 до 1.8. Двоє різних фотографів отримають трохи різні значення: метод дає оцінку, і відповідь залежить від діапазону масштабів, якому ти довіряєш.

Шість поширених хибних уявлень

1. **«Фрактали мусять бути точно самоподібними».** Більшість природних фракталів, як і сама множина Мандельброта, такими не є. Статистичної чи наближеної подібності досить.
2. **«Будь-яка складна картинка — це фрактал».** Річ не в складності, а в узгоджених деталях на різних масштабах. Випадковий розсип точок не має закону масштабування.
3. **«Природні фрактали тривають нескінченно».** Справжні фрактали діють лише в певному діапазоні масштабів — для берегової лінії від міліметрів до кілометрів. Нижче за нього вступає в силу фізика.
4. **«Фрактальна розмірність завжди дробова».** Межа множини Мандельброта і крива Гільберта мають розмірність рівно 2. Важливо те, що вона перевищує топологічну розмірність.
5. **«Фрактали — це просто гарні картинки».** Їх використовують у конструюванні антен, медичній візуалізації, матеріалознавстві, фінансах і комп'ютерній графіці; див. розділ «Застосування».
6. **«Фрактали винайшов Мандельброт».** Він дав їм назву й об'єднав їх у 1975 році, але Кантор, Кох, Серпінський, Гаусдорф, Безикович, Жюліа і Фату досліджували ці об'єкти на десятиліття раніше; див. «Біографії».

Підсумкова таблиця

Приклад	Правило	Ключове число	Урок
Множина Кантора	Викидати середні третини	$D \approx 0.631$	Нульова довжина, незліченно багато точок
Сніжинка Коха	Горбик на кожній середній третині	Площа 8/5, периметр ∞	Скінченна площа, нескінченний край
Трикутник Серпінського	Залишати 3 з 4 трикутників половинного розміру	$D \approx 1.585$	Три методи вимірювання розмірності збігаються
Множина Мандельброта	$z \to z^2 + c$, починаючи із $z = 0$	Радіус утечі 2	Обмежені орбіти малюють множину
Папороть Барнслі	4 афінні відображення, вибрані випадково	24 числа	Короткі правила, багаті форми
Гора зі зміщення середини	Випадкові зсуви, щораунду вдвічі менші	$D = 2 - H$	Статистична самоподібність

Хочеш піти далі? Безкоштовний курс із 21 уроку перетворює ці приклади на структурований шлях із тестами та сертифікатом.

Перевір себе

Тут по одному запитанню до кожного уроку безкоштовного курсу, усього 21. Спробуй відповісти, не заглядаючи назад; відповіді — наприкінці посібника.

1. Хто і коли запровадив слово «фрактал»?

A. Гельге фон Кох, 1904
B. Фелікс Гаусдорф, 1918
C. Бенуа Мандельброт, 1975
D. Гастон Жюліа, 1918

2. Яку самоподібність має сніжинка Коха?

A. Точну
B. Квазі
C. Статистичну
D. Жодної

3. Яка загальна довжина залишається в множині Кантора?

A. 1/3
B. 2/3
C. 0
D. 1/2

4. Скільки відрізків має крива Коха після одного кроку?

A. 2
B. 3
C. 4
D. 6

5. Яка частка площі залишається після n кроків побудови трикутника Серпінського?

A. $(1/2)^n$
B. $(2/3)^n$
C. $(3/4)^n$
D. $(1/3)^n$

6. Хто опублікував першу криву, що заповнює простір?

A. Гільберт, 1891
B. Пеано, 1890
C. Кантор, 1883
D. Кох, 1904

7. Що відбувається з виміряною довжиною берегової лінії, коли лінійка коротшає?

A. Вона зменшується
B. Вона не змінюється
C. Вона зростає
D. Вона стає нульовою

8. Фігура складається з 9 копій самої себе, кожна в масштабі 1/3. Яка її розмірність подібності?

A. 1
B. 1.5
C. 2
D. 3

9. Зменшення клітинки вдвічі збільшує кількість клітинок утричі. Яка розмірність Мінковського?

A. 1.5
B. $\log 3 / \log 2 \approx 1.585$
C. 3
D. 2/3

10. Для s, меншого за розмірність Гаусдорфа множини, міра H^s...

A. дорівнює 0
B. нескінченна
C. дорівнює 1
D. від’ємна

11. Яка теорема гарантує, що СІФ має єдиний атрактор?

A. Теорема Піфагора
B. Теорема Банаха про нерухому точку
C. Велика теорема Ферма
D. Теорема про проміжне значення

12. Наскільки далеко стрибає точка до вибраної вершини в грі «Хаос» для трикутника Серпінського?

A. На чверть шляху
B. На півдороги
C. На дві третини шляху
D. До самої вершини

13. Як переписуються символи в L-системі?

A. По одному, зліва направо
B. Усі одночасно, паралельно
C. Лише останній символ
D. Випадково

14. Траєкторія дробового броунівського руху має показник Герста H = 0.7. Яка розмірність її графіка?

A. 0.7
B. 1.3
C. 1.7
D. 2.7

15. Чому дорівнює $(1 + i)^2$?

A. 2
B. 2i
C. 1 + 2i
D. 0

16. Яка множина Жюліа для c = 0?

A. Одна точка
B. Одиничне коло
C. Пил Кантора
D. Базиліка

17. Чи належить c = −1 множині Мандельброта?

A. Так: орбіта 0 — це 0, −1, 0, −1, …
B. Ні: орбіта втікає
C. Лише на межі
D. Запитання не має відповіді

18. Якого року Лоренц опублікував свій атрактор?

A. 1918
B. 1963
C. 1976
D. 1980

19. Яка узагальнена розмірність дорівнює розмірності Мінковського (box-counting)?

A. D_0
B. D_1
C. D_2
D. $D\infty$

20. Чому природні фрактали виявляють самоподібність лише в обмеженому діапазоні масштабів?

A. Через похибки вимірювань
B. Фізичні процеси змінюються на дуже великих і дуже малих масштабах
C. Вони не справжні фрактали
D. Через рівняння Морана

21. Яка головна перевага фрактальної антени?

A. Її дешевше фарбувати
B. Вона компактна й добре працює на кількох частотах
C. Їй не потрібне живлення
D. Вона невидима для радарів

Відповіді

1. **C** — Мандельброт запровадив це слово 1975 року у своїй книжці *Les objets fractals*.
2. **A** — Крива Коха складається з чотирьох точних копій самої себе, у масштабі 1/3.
3. **C** — Після n кроків довжина становить $(2/3)^n$, а це прямує до 0.
4. **C** — Середня третина замінюється двома відрізками, тож отримуємо 4 відрізки довжиною 1/3.
5. **C** — Кожен крок зберігає 3 з 4 менших трикутників.
6. **B** — Крива Пеано 1890 року була першою; простіша версія Гільберта з'явилася 1891 року.
7. **C** — Коротша лінійка повторює менші затоки й миси, тож загальна довжина зростає.
8. **C** — $\log 9 / \log 3 = 2$. Саме так поводиться квадрат, поділений на сітку 3×3.
9. **B** — $N(\varepsilon/2) = 3N(\varepsilon)$ дає $D = \log 3 / \log 2$.
10. **B** — Нижче від критичного значення H^s нескінченна; вище — дорівнює 0.
11. **B** — Оператор Гатчінсона є стискальним, тож теорема Банаха про нерухому точку дає єдину нерухому множину.
12. **B** — Коефіцієнт стрибка 1/2 відповідає коефіцієнту масштабу трьох відображень.
13. **B** — Саме паралельне переписування відрізняє L-системи від звичайних граматик.
14. **B** — $D = 2 - H = 1.3$.
15. **B** — $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$.
16. **B** — Для $z \to z^2$ точки на одиничному колі на ньому й залишаються; точки всередині прямують до 0, ззовні — до нескінченності.
17. **A** — Орбіта циклічно переходить між 0 і −1, тож залишається обмеженою.
18. **B** — Лоренц опублікував статтю «Deterministic Nonperiodic Flow» 1963 року.
19. **A** — D_0 рахує клітинки, не зважуючи їх за масою.
20. **B** — Поза діапазоном масштабування діє інша фізика, наприклад піщинки в найдрібніших деталях берегової лінії.
21. **B** — Складений фрактальний контур забезпечує багатодіапазонну роботу за малого розміру.

Продовжуй онлайн

На forefractal.com ти можеш пройти безкоштовний курс фрактальної геометрії з 21 уроку з короткими тестами й сертифікатом наприкінці. У кожному уроці є живі рисунки, які можна збільшувати, змінювати й досліджувати.

Також на сайті є інтерактивні дослідники множин Мандельброта й Жюліа, гри хаосу та фрактальних дерев, статті про фрактали в природі, науці й мистецтві, а ще презентації для уроків для вчителів. Усе безкоштовно й доступно сімома мовами.

© 2026 Fractalist · ForeFractal.com · можна вільно друкувати й поширювати для некомерційного навчання